ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1883.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

ACTA MATHEMATICA, 2. 1883.

INHALT. TABLE DES MATIÈRES.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

PAR

E. GOURSAT

à TOULOUSE.

L'expression de la série hypergéométrique au moyen d'une intégrale définie où figure un paramètre variable est connue depuis longtemps. Ce mode de représentation permet de trouver très-simplement les relations linéaires entre les vingt-quatre séries qui appartiennent à une même équation, comme je l'ai montré dans une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris (Juillet 1881). En cherchant à généraliser ce résultat, j'ai été conduit à étudier une classe de fonctions représentées par des intégrales définies, dont j'expose dans ce travail les propriétés caractéristiques.

Dans une lettre adressée à Mr Mittag-Leffler,(1) Mr Hermite a montré comment la notion de coupure s'offrait tout naturellement, au début du calcul intégral, par l'étude d'une intégrale définie où figure un paramètre variable. Les coupures jouent également un rôle essentiel dans cette étude; mais les fonctions sous le signe d'intégration ne sont plus, comme dans la lettre de Mr Hermite, des fonctions uniformes.

La première partie de ce Mémoire est consacrée à la définition des fonctions qui font l'objet de ces recherches, et à la démonstration du théorème fondamental. La seconde partie contient quelques applications. Enfin, dans la troisième, je généralise, à un certain point de vue, les résultats

(1) Acta Societatis Fennicæ tome XII. Journal de Borchardt tome 91.

contenus dans la première partie, et j'étudie en particulier certaines intégrales doubles qui se présentent dans la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables.

I.

(1). Soit $z = f(x, u)$ une fonction des deux variables indépendantes x et u, jouissant des propriétés suivantes. Tout d'abord, elle admet, pour chaque système de valeurs des variables, un nombre fini ou infini de déterminations, mais qui sont telles que le rapport de deux quelconques d'entre elles est une constante. Si x est supposé constant, z consideré comme fonction de la seule variable u admet pour cette variable un nombre *limité* m de valeurs singulières. Ces valeurs singulières sont de deux sortes; les unes sont indépendantes de la valeur particulière attribuée à x, les autres varient en même temps que x. Lorsqu'il y aura lieu de distinguer ces deux sortes de points critiques, je désignerai les premiers par $a_1, a_2, \dots a_n$, les seconds par $u_1, u_2, \dots u_p$, avec la condition $n + p = m$. Mais lorsqu'il n'y aura aucun inconvénient à le faire, je les désignerai d'une manière uniforme par $v_1, v_2, \dots v_m$. Soit $\Phi(x, u) = 0$ l'équation qui nous donne les p valeurs $u_1, u_2, \dots u_p$ variables avec x. Lorsqu'on attribue à u une valeur particulière constante, z devient une fonction de la seule variable x; nous supposerons qu'elle n'admet pas d'autres points critiques que ceux que l'on fait correspondre à cette valeur de u au moyen de l'équation $\Phi(x, u) = 0$.

Il est bien aisé de donner des exemples de pareilles fonctions. Telle est la fonction

$$z = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha};$$

x étant supposé constant, elle admet les trois points critiques $u = 0, u = 1, u = \frac{1}{x}$, dont le dernier seul dépend de la valeur attribuée à x. Telle est encore la fonction

$$z = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1},$$

qui admet n points critiques $a_1, a_2, \dots a_n$, indépendants de x, et en outre le point $u = x$. Cette fonction se présente, comme on sait, dans la

théorie des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, étudiées par Mr Pochammer (*Journal de Crelle tome 71*). Les exemples déjà cités ne sont que des cas particuliers du suivant:

$$z=(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}[\varphi_1(x,u)]^{\lambda_1-1}[\varphi_2(x,u)]^{\lambda_2-1}\dots[\varphi_q(x,u)]^{\lambda_q-1}\Psi(x,u);$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_q$ sont des polynômes entiers en u, de degré $m_1, m_2, \dots m_q$, dont les coëfficients sont des fonctions holomorphes de x, et $\Psi(x, u)$ désigne une fonction holomorphe de x et de u. Les valeurs singulières pour u qui dépendent de x sont données par l'équation

$$\Phi(x, u) = \varphi_1(x, u)\, \varphi_2(x, u) \dots \varphi_q(x, u) = 0,$$

de degré p en u, en posant $p = m_1 + m_2 + \dots + m_q$.

Dans ce qui va suivre, je représenterai, pour abréger, l'intégrale définie $\int z\, du$, prise entre deux limites quelconques C, D par l'indication du chemin entre parenthèses,

$$\int_C^D z\, du = (CD);$$

et il sera convenu, à moins de mention expresse, que cette intégrale est prise suivant le chemin rectiligne joignant les deux points C, D, et que l'on a choisi pour l'intégration une valeur de z bien déterminée.

(2). Soit donc $f(x, u)$ une fonction jouissant des propriétés précédentes; soient a_i, a_h deux des valeurs singulières pour u dont il vient d'être question, choisies de telle sorte que le chemin rectiligne qui joint les deux points a_i, a_h ne contienne aucun autre des points a. Supposons que l'intégrale $(a_i a_h)$ ait un sens tant que ce chemin rectiligne ne contient aucun autre des points pour lequel la fonction $f(x, u)$ cesse d'être holomorphe. L'ensemble des valeurs de x telles que parmi les p valeurs de u, déduites de l'équation $\Phi(x, u) = 0$, il y en ait une ou plusieurs situées sur la ligne droite $a_i a_h$, forme en général sur le plan des x un nombre fini ou infini de portions de courbes ou de courbes complètes dont chacune joue le rôle de coupure pour l'intégrale considérée. Si, pour une valeur donnée de x non située sur les coupures, on choisit la valeur de la fonction z que l'on prend dans l'intégration, l'intégrale $(a_i a_h)$ définit, quand on fait

varier x à partir de cette valeur et quand on associe les valeurs de z de façon qu'elles se suivent d'une manière continue, une fonction analytique de la variable x, que l'on peut continuer tant que le chemin suivi ne rencontre aucune des coupures. Je suppose connus les principes élémentaires de la théorie des fonctions représentées par des intégrales définies, où figure un paramètre variable. Il peut arriver que le système de coupures partage le plan en plusieurs régions distinctes; ce qui précède s'applique alors à chacune d'elles. Considérons en particulier l'une de ces régions, et faisons décrire à la variable x un contour fermé, compris dans son intérieur; la valeur de z, correspondant à une valeur de u comprise entre a_i et a_h peut revenir à sa valeur initiale, ou reprendre cette valeur initiale multipliée par un facteur constant, différent de l'unité. De sorte que l'intégrale elle-même $(a_i a_h)$ peut revenir à sa valeur initiale, ou reprendre cette valeur, multipliée par une constante. Il importe de distinguer ces deux cas.

Désignons par c une valeur de u figurée par un point du chemin rectiligne $a_i a_h$, et cherchons la variation de l'élément de l'intégrale qui correspond à cette valeur de u, quand on fait décrire à la variable x un chemin fermé, compris tout entier à l'intérieur de la région considérée. Supposons que ce contour ne renferme à son intérieur aucune des coupures; la fonction $f(x, c)$ sera holomorphe à l'intérieur de ce contour, puisque les valeurs de x qui, associées à la valeur c, forment un couple de valeurs singulières sont précisément situées sur les coupures. L'élément de l'intégrale qui correspond à cette valeur de u reprendra donc sa valeur initiale; et par suite il en sera de même de l'intégrale $(a_i a_h)$. Si, au contraire, le contour décrit par la variable renferme à son intérieur une ou plusieurs coupures, la fonction $f(x, c)$ cessera d'être holomorphe pour une ou plusieurs valeurs de x situées à l'intérieur de ce contour, et l'élément d'intégrale ne reviendra pas en général à sa valeur primitive. Chaque élément d'intégrale sera multiplié par un même facteur constant facile à calculer, et l'intégrale $(a_i a_h)$ se reproduira multipliée par le même facteur. Remarquons que cette circonstance ne pourra se présenter que si toutes les coupures ne s'étendent pas jusqu'à l'infini dans le plan des x. Pour rendre uniforme la fonction représentée par l'intégrale définie $(a_i a_h)$, il suffira d'ajouter de nouvelles coupures, choisies de telle façon que, dans chaque région, un chemin fermé suivi par la variable x ne puisse com-

prendre à son intérieur aucune des coupures de la première catégorie. Lorsque x franchit l'une de ces nouvelles coupures, la fonction représentée par l'intégrale définie $(a_i a_h)$ se reproduit, multipliée par une constante, qu'il est facile de calculer lorsqu'on connaît $f(x, u)$.

(3). Je vais éclaircir ce qui précède par quelques exemples.

Exemple I. Soit

$$z = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha};$$

si les parties réelles de β et de $\gamma - \beta$ sont positives, l'intégrale définie

$$y = \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

aura un sens, pourvu que x n'ait pas une valeur réelle et positive, supérieure à l'unité. La ligne indéfinie $1 \text{———} +\infty$ sera une coupure pour cette intégrale; cette coupure s'étendant jusqu'à l'infini, d'après une remarque faite tout-à-l'heure, y sera une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan. On achèvera de fixer la valeur de l'intégrale en choisissant les arguments des quantités u, $1-u$, $1-xu$ que l'on prend dans l'intégration; la convention la plus naturelle consiste évidemment à prendre 0 pour argument de u et de $1-u$, et pour argument de $1-xu$ celui qui est nul pour $u = 0$.

Exemple II. Soit

$$z = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1};$$

soient a_i, a_h deux points tels que la ligne droite qui joint ces deux points ne contienne aucun autre des points a, et supposons que les parties réelles de b_i et de b_h soient positives. L'intégrale définie $(a_i a_h)$ admettra comme coupure cette ligne droite $a_i a_h$ elle-même dans le plan des x. Si l'on fait décrire à la variable x un contour fermé entourant une seule fois cette ligne, on voit facilement que chaque élément de l'intégrale est multiplié par $e^{\pm 2\pi\lambda i}$; l'intégrale n'est donc pas une fonction uniforme de x, à moins que λ ne soit un nombre entier. Pour la rendre uniforme, nous introduirons une nouvelle coupure, par exemple une ligne droite indéfinie $a_i L$ partant du point a_i. Si on assujettit le chemin suivi par la variable à ne couper aucune des deux lignes $a_i a_h$, $a_i L$, le symbole $(a_i a_h)$ représente une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan; on voit de plus que, lorsque la variable x traverse la ligne $a_i L$, cette fonction se reproduit, multipliée par le facteur constant $e^{\pm 2i\pi\lambda}$.

Exemple III. Prenons encore

$$z = u^{\beta-1}(u-1)^{\gamma-\beta-1}(u^2-2ux-x-1)^{-\alpha}.$$

L'intégrale définie $(01) = \int_0^1 z\,du$, en supposant positives les parties réelles de β et de $\gamma-\beta$, aura un sens tant que l'équation $u^2-2ux-x-1=0$ ne donnera pas pour u une valeur réelle comprise entre zéro et l'unité. Si l'on écrit cette équation

$$x = \frac{u^2-1}{2u+1},$$

on voit immédiatement qu'elle fait correspondre à la série des valeurs réelles de u comprises entre zéro et l'unité la série des valeurs réelles de x comprises entre -1 et 0; l'intégrale (01) admet donc comme coupure le segment de l'axe des x réel -1 —— 0. Comme dans l'exemple précédent, faisons décrire à la variable x un contour fermé entourant cette coupure; il est aisé de voir que le facteur $(u^2-2ux-x-1)^{-\alpha}$ correspondant à une valeur de u comprise entre zéro et l'unité est multiplié par $e^{\pm 2\pi\alpha i}$, car ce facteur s'annulle pour une valeur de x comprise entre -1 et 0, tandis que les facteurs $u^{\beta-1}$, $(u-1)^{\gamma-\beta-1}$ ne changent pas. La fonction représentée par l'intégrale (01) reprend donc sa valeur initiale multipliée par $e^{\pm 2\pi\alpha i}$. Pour que ce symbole représente une fonction uniforme, il suffira d'ajouter une nouvelle coupure, par exemple la ligne indéfinie $-\infty$ —— -1; et lorsque la variable franchit cette dernière ligne, la fonction est multipliée par $e^{\pm 2\pi\alpha i}$.

Dans les deux derniers exemples, nous avons eu à considérer deux sortes de coupures, d'une nature essentiellement différente. Les unes, comme la ligne -1 —— 0 dans le dernier exemple, sont introduites par l'impossibilité même où l'on se trouve, au moins pour le moment, de continuer la fonction au delà, le symbole qui la représente cessant d'avoir un sens bien précis pour un point de cette ligne. Il en est tout autrement des secondes. L'intégrale définie ne cesse pas d'avoir un sens, et nous n'ajoutons ces nouvelles coupures que pour rendre la fonction uniforme; mais nous savons ce que devient cette fonction lorsque la variable franchit l'une de ces courbes. On peut encore remarquer que, une fois qu'on a choisi le chemin d'intégration, les premières coupures sont complètement fixées, tandis que la façon dont on peut prendre les secondes comporte une

grande indétermination, comme pour les coupures de RIEMANN proprement dites. Pour toutes ces raisons et pour la clarté de ce qui va suivre, je distinguerai constamment ces deux sortes de lignes: j'appellerai les premières *coupures de première espèce* et je les désignerai par la lettre C'. Les autres seront des *coupures de seconde espèce,* et désignées par la lettre C''.

(4). Revenons maintenant à la fonction $f(x, u)$, et soit $\Phi(x, u) = 0$ la relation entre les valeurs de x et de u qui sont pour cette fonction des couples de valeurs singulières. On suppose qu'à une valeur donnée de x cette relation ne fait correspondre qu'un nombre limité p de valeurs pour u. Marquons dans le plan des x les points où une ou plusieurs des racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$ cessent d'être holomorphes, et traçons un système de coupures C_1 partant de ces points et s'étendant jusqu'à l'infini dans le plan sans se croiser entre elles. Grâce à ces coupures, les p racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$ deviennent des fonctions holomorphes de x dans toute l'étendue du plan, que nous désignerons par $u_1, u_2, \dots u_p$. Soit u_h l'une de ces racines et a_i l'une des valeurs critiques pour u qui ne dépendent pas de x; admettons que la droite qui joint ces deux points ne contient aucune autre des valeurs singulières de u, correspondant à la valeur initiale attribuée à x, et en outre que l'intégrale $(a_i u_h)$ a un sens. La variable décrivant un chemin quelconque assujetti seulement à ne pas rencontrer les lignes C_1, on pourra continuer la fonction représentée par l'intégrale définie $(a_i u_h)$ tant que ce segment de droite ne contiendra aucun autre des points a_k ou u_k. L'ensemble des valeurs de x telles que l'un de ces points soit situé sur la ligne droite $a_i u_h$ formera sur le plan des x un système de courbes ou de portions de courbes dont chacune sera une coupure de première espèce pour l'intégrale $(a_i u_h)$; ces nouvelles coupures peuvent d'ailleurs coïncider en tout ou en partie avec les lignes C_1, diviser avec elles le plan en un nombre fini ou infini de régions distinctes. Dans chacune de ces régions, l'intégrale précédente représente une fonction analytique de la variable x. Nous avons encore à rechercher si, dans cette région, elle est uniforme ou non; ce qui peut se faire de la même manière que plus haut. Posons

$$u = a_i + t(u_h - a_i),$$

t étant une nouvelle variable réelle qui croît dans l'intégration de zéro à l'unité. L'integrale $(a_i u_h)$ devient

$$(a_i u_h) = \int_0^1 f_1(x,\ t)\,(u_h - a_i)\,dt,$$

en posant $f_1(x,\ t) = f(x,\ a_i + t(u_h - a_i))$. Donnant à t une valeur particulière comprise entre zéro et l'unité, on cherchera la variation de l'élément de l'intégrale provenant de cette valeur de t, quand on fait décrire à x un contour fermé ne rencontrant pas les coupures. Comme u_h revient à sa valeur initiale, l'élément d'intégrale ne pourra que reprendre sa valeur initiale, ou revenir à cette valeur multipliée par un facteur constant. D'une manière générale, la valeur finale de $(a_i u_h)$ sera égale à la valeur initiale, multipliée par une constante qui peut être différente de l'unité. Dans ce dernier cas, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles coupures de seconde espèce C'', de façon à rendre uniforme la fonction représentée par le symbole $(a_i u_h)$.

Si au point a_i on associe successivement chacune des racines de l'équation $\Phi(x,\ u) = 0$, on formera p intégrales analogues à la précédente. A chacune d'elles correspondra, outre les lignes C_1, un système de coupures de première espèce C et de seconde espèce C'', ces lignes pouvant coïncider en tout ou en partie pour plusieurs des racines, ou être à la fois des coupures de première espèce pour certaines intégrales, et de seconde espèce pour d'autres. Nous savons déjà que, lorsque la variable franchit une des lignes C'', l'intégrale correspondante se reproduit à un facteur constant près. Les lignes C_1 se comportent en réalité comme des coupures de seconde espèce; la variable x franchissant l'une de ces lignes, ne coïncidant pas avec une coupure de première espèce, la racine u_h se change en une racine u_k de sorte que l'intégrale $(a_i u_h)$ se change en l'intégrale $(a_i u_k)$. Nous verrons dans la suite ce que deviennent ces diverses intégrales lorsqu'on fait franchir à la variable une des lignes C.

(5). *Exemple I.* Soit

$$y = \int_0^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}\,(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,(1-xu)^{-\alpha}\,du.$$

La ligne droite 0 —— 1 est une coupure de première espèce pour cette intégrale; si on la met sous la forme

$$y = x^{-\beta}\int_0^1 t^{\beta-1}\,(1-t)^{-\alpha}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{\gamma-\beta-1}dt,$$

par le changement de variable $u = \frac{t}{x}$, on reconnaît immédiatement que cette intégrale est multipliée par le facteur $e^{\pm 2\pi\beta i}$ lorsque x décrit un contour fermé entourant la droite $0 —— 1$; pour rendre cette intégrale uniforme, il suffira d'introduire la ligne $1 —— +\infty$ comme coupure de seconde espèce.

Exemple II. Soit

$$y = \int_{a_i}^{x} (u - a_1)^{b_1 - 1} (u - a_2)^{b_2 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 1} du = (a_i x)$$

Si nous joignons le point a_i aux autres points $a_1, a_2, \dots a_n$ par des lignes droites, les prolongements de ces diverses lignes jusqu'à l'infini constitueront pour l'intégrale $(a_i x)$ des coupures de première espèce. Posons dans cette intégrale

$$u = a_i + t(x - a_i),$$

elle devient:

$$y = \int_0^1 [a_i - a_1 + t(x - a_i)]^{b_1 - 1} \dots [a_i - a_n + t(x - a_i)]^{b_n - 1} t^{b_i - 1} (x - a_i)^{b_i + \lambda - 1} (t - 1)^{\lambda - 1} dt;$$

lorsque x décrit une petite circonférence autour du point a_i, il est aisé de reconnaître que la valeur finale de y est égale à sa valeur initiale multipliée par $e^{\pm 2\pi i(\lambda + b_i)}$. Pour rendre la fonction uniforme, on ajoutera une coupure de seconde espèce C'', partant du sommet a_i et s'étendant jusqu'à l'infini.

Exemple III. Soit

$$f(x, u) = u^{\beta - 1} (u - 1)^{\gamma - \beta - 1} (u^2 - 2ux - x - 1)^{-a}$$

Dans ce nouvel exemple il y a deux points critiques variables avec x, donnés par l'équation du second degré

$$u^2 - 2ux - x - 1 = 0; \tag{1}$$

d'où l'on tire

$$u = x \pm \sqrt{x^2 + x + 1}$$

Les points où ces deux racines cessent d'être distinctes sont les deux points $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; lorsque x tourne autour d'un de ces points,

les deux racines de l'équation (1) s'échangent entre elles. Soient u_1, u_2 ces deux racines; les deux intégrales

$$\int_0^{u_1} f(x,\ u)\,du, \qquad \int_0^{u_2} f(x,\ u)\,du,$$

en supposant positives les parties réelles de β et de $1-\alpha$, auront un sens tant que l'une des quantités u_1, u_2, n'aura pas une valeur réelle supérieure à l'unité et que l'une d'elles ne sera pas située sur la ligne droite qui joint l'origine à la seconde. La relation $u^2-2ux-x-1=0$ fait correspondre aux valeurs réelles de u supérieures à l'unité la série des valeurs réelles de x comprises entre 0 et $+\infty$; la ligne $0 \text{———} +\infty$ est donc une coupure de première espèce pour l'une au moins de ces intégrales. Cherchons maintenant les valeurs de x telles que l'une des racines u_1, u_2, soit sur la ligne droite qui joint l'origine à la seconde: cela revient à chercher les valeurs de x telles que le rapport $\frac{u_1}{u_2}$ ait une valeur réelle et positive. Or l'équation qui nous donne le rapport des deux racines de l'équation (1) est la suivante:

$$r^2+2r\left(\frac{2x^2+x+1}{x+1}\right)+1=0. \tag{2}$$

ou, en ordonnant par rapport à x,

$$x^2+\frac{(r+1)^2}{4r}x+\frac{(r+1)^2}{4r}=0.$$

on en déduit

$$x=\frac{-(r+1)^2\pm(r+1)\sqrt{r^2-14r+1}}{8r}.$$

Soient r_1, r_2 les deux racines de l'équation $r^2-14r+1=0$; $r_1=7-\sqrt{48}$, $r_2=7+\sqrt{48}$. Quand on fait croître r de 0 à r_1, puis de r_2 à $+\infty$, le point x décrit la ligne $-\infty \text{———} -1$; puis si on attribue à r les valeurs réelles comprises entre r_1 et r_2, le point qui figure la valeur de x décrit deux arcs de courbe symétriques par rapport à l'axe réel, partant

du point $B = -\frac{(x_1+1)^2}{8x_1}$ et aboutissant aux deux points de ramification A, A' (fig. 1).

$$A = \frac{-1 + \sqrt{-1}\,\sqrt{3}}{2}, \qquad A' = \frac{-1 - \sqrt{-1}\,\sqrt{3}}{2}.$$

Chacune des racines u_1, u_2 est une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan, quand on assujettit le chemin suivi par la variable à ne couper aucune des lignes $0 \text{———} +\infty$, $-\infty \text{———} -1$, ABA'; nous prendrons par exemple pour u_1 la racine qui se réduit à $+1$ pour $x = 0$, et pour u_2 celle qui est égale à -1.

Considérons en particulier l'intégrale $(0u_1)$; lorsqu'on attribue à x une valeur réelle positive, la racine u_1 qui part de l'unité pour $x = 0$ aura une valeur supérieure à l'unité. La ligne $0 \text{———} +\infty$ est donc une coupure de première espèce pour cette intégrale. Si on fait le changement de variables $u = tu_1$, elle devient

$$(0u_1) = \int_0^1 t^{\beta-1}\, u_1{}^{\beta}\, (tu_1 - 1)^{\gamma-\beta-1}\, (t^2u_1^2 - 2xtu_1 - x - 1)^{-\alpha}\, dt$$

Donnons à t une valeur particulière comprise dans les limites de l'intégration, et cherchons la variation de l'élément de l'intégrale qui correspond à cette valeur de t quand on fait décrire à la variable x un chemin fermé ne coupant aucune des lignes précédentes. Il est aisé de reconnaître qu'aucun des facteurs u_1, $tu_1 - 1$, $t^2u_1^2 - 2tu_1x - x - 1$, ne s'annulle pour aucune valeur de x comprise à l'intérieur de ce contour; la relation

$$x = \frac{u_1^2 - 1}{2u_1 + 1}$$

montre en effet que pour $u_1 = 0$, on a $x = -1$; pour $u_1 = \frac{1}{t}$, t étant inférieur à l'unité, x aura une valeur réelle et positive. Enfin pour que la facteur $t^2u_1^2 - 2tu_1x - x - 1$ fût nul, il faudrait que l'on eût

$$x = \frac{u_1^2 - 1}{2u_1 + 1} = \frac{t^2u_1^2 - 1}{2tu_1 + 1};$$

ce qui montre que les deux racines de l'équation (1) seraient u_1 et tu_1 dont le rapport est t. Le point x serait donc sur l'une des coupures.

Il en résulte que, après un pareil chemin, l'élément de l'intégrale reviendra à sa valeur primitive; l'intégrale $(0u_1)$ est donc, grâce aux coupures établies, une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan. La même démonstration s'applique évidemment à la seconde intégrale $(0u_2)$, mais il est à remarquer que la ligne $0 —— + \infty$ n'est pas une coupure pour cette nouvelle intégrale, car la racine $u_2 = x - \sqrt{x^2 + x + 1}$ a une valeur réelle et négative lorsque x est positif.

On peut encore se demander ce que deviennent les fonctions représentées par $(0u_1)$ et $(0u_2)$ lorsque la variable franchit l'une des lignes $-\infty —— -1$, ABA'. Supposons, par exemple, que les racines soient disposés avec le point $u = 0$, dans l'ordre suivant 0, u_1, u_2. L'intégrale $(0u_2)$ cesse d'avoir un sens, mais l'intégrale $(0u_1)$ continue à avoir un sens et représente une fonction analytique bien définie dans le voisinage de cette valeur de x. Supposons, par exemple, que la variable franchisse la coupure $-\infty —— -1$, en passant du point m au point m'; la racine u_1 reste égale à u_1, car le contour décrit par la variable entoure les deux points critiques A, A'; et la fonction représentée par $(0u_1)$ dans le voisinage du point m sera représentée par la même intégrale dans le voisinage du point m', abstraction faite d'un facteur constant.

Si la variable franchissait la coupure ABA' en passant du point n au point n' (fig. 1), u_1 se changerait en u_2 et la continuation analytique de la fonction $(0u_1)$ serait représentée par $(0u_2)$.

Exemple IV. On étudierait de la même façon les deux intégrales $(1u_1)$, $(1u_2)$ relatives à la même fonction $f(x, u)$. Les coupures seront données par les valeurs de x telles que l'une des racines u_1, u_2 soit réelle et négative, ou par les valeurs de x telles que les trois points 1, u_1, u_2 soient en lignes droite, l'un des points u_1 ou u_2 étant entre les deux autres. L'équation (1) fait correspondre aux valeurs négatives de u la série des valeurs réelles de u; on a donc une première coupure avec l'axe des x réels.

Pour avoir les autres, posons $u = 1 - v$; l'équation (1) devient

$$(3) \qquad v^2 - 2v(1 - x) - 3x = 0$$

Le rapport des deux racines v_1, v_2 de cette équation est donné par l'équation suivante

$$(4) \qquad 3x(r^2 + 1) + r(4x^2 - 2x + 4) = 0.$$

ou

$$x^2 + x\left(\frac{3r^2 - 2r + 3}{4r}\right) + 1 = 0$$

On en tire

$$x = \frac{-(3r^2 - 2r + 3) \pm (r + 1)\sqrt{3(3r^2 - 10r + 3)}}{8r}$$

Les nouvelles coupures correspondent aux valeurs de x telles que le rapport r soit réel et positif. Quand on fait varier r de 0 à $\frac{1}{3}$ ou de 3 à $+\infty$, x prend toutes les valeurs réelles et négatives. Si on donne ensuite à r toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{3}$ et 3, le point qui figure la valeur de x décrit deux branches de courbe, symétriques par rapport à l'axe réel, partant du point $x = -1$ et aboutissant aux deux points A, A' (fig. 2).

Grâce aux coupures $-\infty$ —— -1, $AB'A'$, les deux racines u_1, u_2 deviennent des fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan. Appelons u_1 celle de ces racines qui est égale à $+1$ pour $x = 0$; il est aisé de reconnaître que cette racine reste réelle et positive tant que x reste supérieur à -1. La ligne -1 —— $+\infty$ n'est donc pas une coupure pour l'intégrale $(1u_1)$; en posant, comme tout-à-l'heure

$$u = 1 + t(u_1 - 1)$$

où t est une variable réelle croissant de zéro à l'unité, on reconnaitra qu'il est nécessaire, pour la rendre uniforme, d'introduire la ligne 0 —— $+\infty$ comme coupure de seconde espèce.

Quant à l'intégrale $(1u_2)$, l'axe des x réels partage le plan en deux régions distinctes; dans chacune d'elles, l'intégrale $(1u_2)$ représente une fonction uniforme de x, pourvu, bien entendu que le chemin suivi par la variable ne rencontre pas l'autre ligne $AB'A'$.

(6). Il reste peu de choses à dire sur les intégrales définies de la forme $(u_i u_h)$, où l'on suppose les deux limites u_i, u_h, variables avec x. On aura, comme plus haut, un premier système de coupures, formé par des lignes indéfinies partant des points où les racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$ cessent d'être holomorphes. Grâce à ces coupures, u_i, u_h deviennent des

fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan; l'ensemble des valeurs de x telles que le chemin rectiligne joignant ces deux points passe par un autre des points a_i ou des points u_i constitue pour la même intégrale un système de coupures de première espèce. Pour étudier l'intégrale dans une région du plan limitée par ces lignes, on posera

$$u = u_i + t(u_h - u_i);$$

elle devient:

$$(u_i u_h) = \int_0^1 f_1(x, t)\, dt,$$

en posant $f_1(x, t) = f(x, u_1 + t(u_h - u_i))\,(u_h - u_i)$. On cherchera ensuite la variation de l'élément de l'intégrale correspondant à une valeur de t quand on fait décrire à x un contour fermé, et on ajoutera, s'il y a lieu, des coupures de seconde espèce pour rendre uniforme, dans chaque partie du plan, la fonction représentée par cette intégrale définie.

Considérons, pour donner un exemple, l'intégrale

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^{\beta-1}\,(u-1)^{\gamma-\beta-1}\,(u^2 - 2ux - x - 1)^{-\alpha}\, du,$$

où u_1, u_2 sont les deux racines de l'équation $u^2 - 2ux - x - 1 = 0$; intégrale qui a un sens, si la partie réelle de $1 - \alpha$ est positive, et si la ligne droite qui joint les deux points u_1, u_2 ne contient ni le point $u = 0$, ni le point $u = 1$. Cette ligne droite contiendra le point $u = 0$, si le rapport $\frac{u_1}{u_2}$ est réel et négatif; l'équation (2) montre qu'il en sera ainsi lorsque x aura une valeur réelle supérieure à -1. De même, cette ligne droite passera par le point $u = 1$, si le rapport des racines de l'équation (3) est réel et négatif; pour qu'il en soit ainsi, nous voyons, d'après l'équation (4), qu'il faudra que x soit réel et positif. La ligne -1 ——— $+\infty$ est donc une coupure de première espèce pour cette intégrale, et il n'y en a pas d'autre. Pour que u_1, u_2 soient des fonctions uniformes de x, nous ajouterons une nouvelle coupure, par exemple la ligne $AB'A'$ (fig. 2). L'intégrale $(u_1 u_2)$ représente une fonction uniforme de x, tant que le chemin suivi par la variable ne franchit aucune des lignes précédentes. Si on y pose, en effet

$$u = u_1 + t(u_2 - u_1),$$

elle devient

$$y = \int_0^1 \{u_1 + t(u_2 - u_1)\}^{\beta-1} \{u_1 - 1 + t(u_2 - u_1)\}^{\gamma-\beta-1} \{[u_1 + t(u_2 - u_1)]^2 -$$
$$- 2x[u_1 + t(u_2 - u_1)] - x - 1\}^{-\alpha} (u_2 - u_1)\, du;$$

Les deux premiers facteurs ne peuvent s'annuller, en supposant t compris entre zéro et l'unité, tant que x n'a pas une valeur positive. Pour que le dernier s'annulle, il faudrait que l'on eut $u_2 = u_1 + t(u_2 - u_1)$, c'est-à-dire $u_2 = u_1$; cela n'aura lieu que pour les points de ramification A, A'. Lorsque x décrira un contour fermé, on voit que chaque élément de l'intégrale reviendra à sa valeur initiale.

Lorsque la variable traverse l'arc de courbe $AB'A'$, les deux racines u_1, u_2 s'échangent entre elles; la forme précédente nous montre que l'intégrale se reproduit multipliée par $e^{\pm\pi(\alpha+1)i}$.

(7). Les exemples précédents suffisent, je crois, pour bien montrer la nature et les propriétés déjà obtenues des fonctions que j'étudie, propriétés qui résultent uniquement de l'étude attentive de la manière même dont ces fonctions sont définies. Revenons maintenant au cas général, et considérons une fonction $f(x, u)$ jouissant des propriétés énoncées; admettons que, sauf pour des valeurs de x formant une ou plusieurs courbes dans le plan des x, parmi les m points critiques v_1, v_2, ... v_m il n'y en ait pas trois en ligne droite, et que chacune des intégrales $(v_i v_h)$, en nombre $\frac{m(m-1)}{2}$, a un sens. Nous verrons plus loin comment on peut écarter ces restrictions. L'ensemble des valeurs de x telles que, parmi les m points v_1, v_2 . . . . v_m il y en ait plus de deux en ligne droite formera dans le plan des x un nombre fini ou infini d'arcs de courbes ou de courbes complètes, dont chacune jouera le rôle de coupure de première espèce pour une ou plusieurs des intégrales. Prenant l'une de ces intégrales, nous ajouterons, s'il y a lieu, des coupures de seconde espèce, de façon qu'elle représente une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan ou dans les diverses parties du plan. Après avoir opéré ainsi avec chacune des intégrales, nous aurons, au moyen des coupures C, C'', divisé le plan en un nombre fini ou infini de régions distinctes. Dans chacune de ces régions, toutes les intégrales $(v_i v_h)$ ont un sens et représentent des fonctions uniformes de x, qui seront bien déterminées quand

on aura choisi, dans chaque région, la valeur de la fonction $f(x, u)$ que l'on prend dans l'intégration.

Le but final de ce travail est de rechercher ce que deviennent ces fonctions lorsque, partant d'un point de l'une de ces régions, on fait décrire à la variable un chemin quelconque. Au moyen de ce qui précède, la réponse est facile, quand le chemin suivi par la variable ne traverse que des coupures de seconde espèce. Prenons une intégrale telle que $(a_i a_h)$, dont les deux limites sont indépendantes de x; tant que la variable ne franchit pas une ligne pour laquelle cette intégrale cesse d'avoir un sens, la continuation de la fonction sera représentée par le même symbole; mais on pourra arriver dans une nouvelle partie du plan avec une valeur pour $f(x, u)$ différente de celle qui a été choisie dans cette partie. On pourra donc la représenter par $K(a_i a_h)$, K étant une constante convenable. De même, tant que x ne franchit pas une coupure de première espèce pour des intégrales telles que $(a_i u_h)$ ou $(u_i u_h)$, ces intégrales continuent à avoir un sens; mais il peut se faire que u_i, u_h se changent en d'autres racines u'_i, u'_h, et que l'on arrive avec une valeur de $f(x, u)$ différente de celle qui a été adoptée. La continuation analytique de nos fonctions sera donc représentée par des intégrales telles que $K_1(a_i u'_h)$, $K_2(u'_i u'_h)$, K_1, K_2 étant des constantes convenables. En résumé:

Si la variable x, partant d'une région du plan, décrit un chemin quelconque, terminé à un point d'une autre région, sans franchir aucune coupure de première espèce, les fonctions représentées par les intégrales définies dans la région initiale peuvent être continuées tout le long du chemin, et on arrive dans la nouvelle partie du plan avec des fonctions qui s'expriment par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen des mêmes intégrales.

8). Nous démontrerons plus loin que la propriété subsiste, quel que soit le chemin suivi par la variable; mais auparavant, il est indispensable de remarquer que les $\frac{m(m-1)}{2}$ intégrales considérées peuvent s'exprimer au moyen de quelques-unes d'entre elles. Supposons x constant et pris dans l'une des régions que nous venons de définir; soient r_i, r_h, r_g trois des valeurs singulières pour la fonction $f(x, u)$ correspondant à cette valeur de x, telles qu'il n'y ait aucune autre valeur singulière à l'intérieur du triangle ayant ces trois points pour sommets (fig. 3). Entourons ces trois

points de circonférences d'un rayon infiniment petit; nous formons ainsi un contour fermé *ablb'cmc'a'na* à l'intérieur duquel $f(x, u)$ est holomorphe. On peut par conséquent lui appliquer le théorème de CAUCHY, et on obtient la relation

$$(ab) + (blb') + (b'c) + (cmc') + (c'a') + (a'na) = 0$$

Si on fait ensuite décroître indéfiniment les rayons des petites circonférences, les intégrales (ab), $(b'c)$, $(c'a')$ tendent respectivement vers $(v_i v_h)$, $(v_h v_g)$, $(v_g v_i)$ tandis que les modules des intégrales (blb'), (cmc'), (ana') deviennent plus petits que toute quantité donnée. On en conclut la relation

$$(v_i v_h) + (v_h v_g) + (v_g v_i) = 0$$

Si on a choisi la valeur de la fonction z que l'on adopte le long du chemin *ab*, après avoir décrit l'arc *blb'*, on arrivera au point b' avec une valeur parfaitement déterminée pour z, ainsi qu'au point c'. Il suffit donc de fixer la valeur de z le long d'un des côtés du contour, pour que la valeur soit connue sans ambiguité le long des autres côtés, et la relation précédente ne contient en réalité rien d'arbitraire. Chaque fois qu'on sera conduit à une égalité de cette forme, il sera entendu que les valeurs de z que l'on prend dans l'intégration sont fixées comme il vient d'être expliqué pour le cas précédent. Cela posé, si l'on considère tous les polygones ayant pour sommets des points v, à l'intérieur desquels $f(x, u)$ est holomorphe, l'application du théorème de CAUCHY conduira à une relation de la forme précédente. Un même côté appartenant à plusieurs polygones, les valeurs de l'intégrale provenant de ce côté ne seront pas en général les mêmes dans les différentes relations; mais on sait que ces valeurs ne peuvent différer que par un facteur constant et, en définitive, on obtiendra entre les $\frac{m(m-1)}{2}$ intégrales un certain nombre d'équations linéaires et homogènes à coefficients constants. Il est aisé de s'assurer, en prenant des cas particuliers, que ces équations peuvent ne pas être toutes distinctes. Mais on peut toujours exprimer les $\frac{m(m-1)}{2}$ intégrales au moyen de $m-1$ d'entre elles convenablement choisies, qui forment un *système fondamental*. On pourrait former un système fondamental de bien des manières; voici celle que j'adopterai.

Les m points critiques de la fonction $f(x, u)$ étant distribués d'une manière quelconque dans le plan, pour une valeur de x supposée constante de telle façon cependant qu'il n'y en ait pas trois en ligne droite, choisissons deux de ces points de telle sorte que la ligne droite qui les joint laisse tous les autres points critiques d'un même côté; appelons v_1, v_2 ces deux points. Imaginons une ligne droite indéfinie à partir du point v_1, appliquée d'abord sur $v_1 v_2$, que l'on fait ensuite tourner autour de v_1 dans un sens convenable, jusqu'à ce qu'elle vienne à rencontrer successivement tous les autres points critiques, et numérotons-les dans l'ordre même où ils se présentent, v_3, v_4, ... v_m. Si l'on joint ensuite chacun de ces points au suivant, on forme une ligne polygonale $v_1 v_2 v_3 \ldots v_m$, jouissant des propriétés suivantes: 1° elle ne se coupe pas elle-même; 2° v_i étant un sommet de cette ligne, la ligne indéfinie $v_1 v_i$ laisse d'un même côté tous les points d'indice inférieur à i, et de l'autre côté tous les points d'indice supérieur à i (fig. 4).

Supposons que toutes les intégrales prises entre deux des sommets v_1, v_2, ... v_{i-1}, v_i puissent s'exprimer linéairement au moyen des $(i-1)$ intégrales

$$(v_1 v_2),\ (v_2 v_3),\ \ldots\ (v_{i-1} v_i):$$

je dis que la même propriété subsiste lorsqu'on augmente l'indice i d'une unité. Joignons en effet le point v_{i+1} aux i points v_1, v_2, v_3, ... v_i; nous formerons ainsi i triangles à l'intérieur desquels $f(x, u)$ est holomorphe. Soit par exemple v_g $(g < i)$ un point tel que la fonction $f(x, u)$ soit holomorphe à l'intérieur du triangle $v_g v_i v_{i+1}$; l'application du théorème de Cauchy au contour de ce triangle nous donne la relation

$$(v_g v_{i+1}) = (v_g v_i) + (v_i v_{i+1}),$$

qui montre que $(v_g v_{i+1})$ s'exprime linéairement au moyen des intégrales précédentes et de la nouvelle $(v_i v_{i+1})$. En continuant de proche en proche, on verrait de même que chacune des intégrales $(v_h v_{i+1})$ où $h < i$, s'exprime au moyen des intégrales

$$(v_1 v_2),\ (v_2 v_3),\ \ldots\ (v_{i-1} v_i),\ (v_i v_{i+1})$$

La loi est évidemment vraie pour $i = 3$, car le triangle $v_1 v_2 v_3$ donne immédiatement $v_1 v_3 = (v_1 v_2) + (v_2 v_3)$; donc elle est générale. En parti-

culier, si l'on prend $i = m$, on voit que toutes les intégrales s'expriment au moyen des $m - 1$

$$(v_1 v_2),\ (v_2 v_3),\ \ldots\ (v_{m-1} v_m)$$

On pourrait encore former un système fondamental en considérant toutes les intégrales prises suivant les lignes issues d'un même sommet. La démonstration ne présente aucune difficulté.

Les relations précédentes dépendent des positions respectives des points $v_1, v_2, \ldots v_m$; elles resteront les mêmes tant que ces positions respectives resteront les mêmes, c'est-à-dire tant que la variable x restera comprise dans une région du plan limitée par des coupures. Mais elles seront variables en général d'une région à l'autre. C'est une remarque qui résulte bien clairement des développements antérieurs, et sur laquelle il me paraît inutile d'insister.

(9). J'arrive maintenant à l'objet essentiel de ce travail, qui est de rechercher ce que deviennent les intégrales précédentes, lorsque la variable x arrive à une coupure de première espèce. Soit C une coupure pour $(v_i v_h)$; lorsque x vient à coïncider avec un point x_0, de cette ligne, un troisième point critique v_k se trouve situé sur la ligne droite $v_i v_h$. Soient ξ, ξ' deux points situés à des distances très-petites du point x_0 de part et d'autre de la courbe C (fig. 5). Figurons les positions respectives des points v_i, v_h, v_k pour $x = \xi$, et pour $x = \xi'$ (fig. 6).

Lorsque x est venu en ξ' les trois points critiques que, pour plus de généralité, je suppose variables avec x, seront venus respectivement en v'_i, v'_h, v'_k. Prenons les points ξ et ξ' assez rapprochés du point x_0 pour que le triangle $v_i v_k v_h$ ne contienne aucun autre point critique v et que les intégrales $v_i v_k$, $v_h v_k$ conservent un sens quand x va de ξ en ξ'; ce qui pourra toujours se faire si l'on suppose qu'un seul point v_k traverse la ligne $v_i v_h$ pour $x = x_0$. La fonction $f(\xi, u)$ étant holomorphe à l'intérieur du triangle $v_i v_k v_h$, on a

$$(v_i v_h) = (v_i v_k) + (v_k v_h)$$

On pourra donc remplacer le symbole $(v_i v_h)$ par la somme $(v_i v_k) + (v_k v_h)$ avant que x n'ait franchi la coupure; mais lorsque x va de ξ en ξ', les intégrales $(v_i v_k)$, $(v_k v_h)$ ne cessent pas d'avoir un sens et, lorsqu'on arrive au point ξ' la continuation analytique de la fonction $(v_i v_h)$ se trouve encore représentée par la somme $(v'_i v'_k) + (v'_k v'_h)$, où la valeur de $f(x, u)$ que

l'on prend dans l'intégration est fixée sans ambiguité. La fonction qui, aux environs du point ξ, était égale à $(v_i v_h)$ est donc égale, aux environs du point ξ', *à une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des intégrales se rapportant à la même fonction* $f(x, u)$.

Il est à remarquer que la somme $(v'_i v'_k) + (v'_k v'_h)$ ne sera pas égale en général à $(v'_i v'_h)$. Imaginons un cercle de rayon infiniment petit entourant le point v_k. Dans le triangle $v_k v_i v_h$, on a

$$(v_i v_h) = (v_i l) + (lm) + (m v_h);$$

la somme contenue dans le second membre devient, pour $x = \xi'$,

$$(v'_i l') + (l'm') + (m' v'_h)$$

et si v'_k est véritablement un point de ramification pour $f(\xi', u)$, cette dernière somme ne sera pas égale à $(v'_i v'_h)$.

Le raisonnement se fait à peu près de la même manière quel que soit le nombre des points critiques qui viennent à traverser la ligne droite $v_i v_h$ pour $x = x_0$. Supposons, par exemple, qu'il y en ait deux v_g, v_k comme l'indique la figure (7).

On a d'abord

$$(v_i v_g) = (v_i v_k) + (v_k v_g),$$

puis

$$(v_i v_h) = (v_i v_g) + (v_g v_h);$$

d'où on déduit

$$(v_i v_h) = (v_i v_k) + (v_k v_g) + (v_g v_h).$$

Le reste de la démonstration s'achève comme plus haut, et l'on voit bien aisément que la méthode est générale.

Faisons maintenant décrire à la variable un chemin quelconque; chaque fois que ce chemin traverse une coupure de première espèce pour l'une des intégrales, cette intégrale se trouvera remplacée par une somme d'intégrales analogues multipliées par des facteurs constants, et on en conclut que:

1° On peut continuer la fonction représentée par chacune des intégrales définies, quel que soit le chemin suivi par la variable, et cela sans aucune ambiguité, tant que les points v_1, v_2, ... v_m restent à distance finie et distincts les uns des autres. Les seules valeurs critiques sont

donc les valeurs telles que v_1, $v_2, \ldots . v_m$ ne soient pas tous différents ou cessent d'être holomorphes.

2° On arrive dans chaque région du plan avec des fonctions qui s'expriment par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen des mêmes intégrales dans cette région du plan.

Si donc on fait décrire à la variable x un contour fermé quelconque ne passant par aucun des points critiques, les valeurs finales de nos fonctions seront liées aux valeurs initiales par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants. Cette propriété est caractéristique des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients uniformes. (TANNERY, *Annales de l'Ecole Normale, tome IV 2me Série p. 130.)*

On sait d'ailleurs que toutes ces intégrales s'expriment linéairement au moyen de $(m - 1)$ d'entre elles, et on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème I. Toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$ *provenant d'une même fonction* $f(x, u)$, *considérées comme fonctions de* x, *satisfont à une même équation différentielle linéaire d'ordre* $m - 1$ *à coefficients uniformes.*

Les points critiques de cette équation différentielle sont, d'après ce qui précède, les points où l'une des racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$ cesse d'être holomorphe, ou les points où deux des points critiques v_1, $v_2, \ldots . v_m$ viennent se confondre. Ces derniers points sont des points de croisement pour les coupures de première espèce. Par exemple, si pour $x = x_1$ les deux points v_i et v_h viennent se confondre, le point x_1 appartiendra à toutes les coupures de première espèce pour les intégrales telles que $(v_i v_g)$, $(v_h v_g)$.

(10). Il importe maintenant de nous débarrasser de certaines restrictions qui ont été introduites pour faciliter la démonstration, mais qui ne sont nullement nécessaires.

En premier lieu, on a supposé les intégrales prises suivant les lignes droites joignant deux points critiques; le théorème subsiste, quel que soit le chemin suivant lequel on prend l'intégrale. Soient v_i, v_h deux des points critiques; considérons un chemin de forme arbitraire $v_i m v_h$ joignant ces deux points et ne passant par aucun autre point critique (fig. 8). Si le contour $v_i m v_h v_i$ formé du chemin $v_i m v_h$ et de la ligne droite $v_i v_h$ ne renferme à son intérieur aucun autre des points v, on a $(v_i m v_h) = (v_i v_h)$; mais si ce contour renferme un autre point critique v_k, on considérera le

contour formé du chemin $v_i m v_h$ et des deux lignes droites $v_i v_k$, $v_h v_k$ et on aura encore

$$(v_i m v_h) = (v_i v_k) + (v_k v_h);$$

dans les deux cas, on voit que l'intégrale curviligne satisfait à la même équation différentielle que les intégrales rectilignes.

Nous avons admis en outre que, parmi les m points $v_1, v_2, \ldots . v_m$, il n'y en avait pas en général trois en ligne droite. Mais il est bien aisé de voir comment on doit modifier la démonstration quand cette condition n'est pas remplie. Supposons par exemple que les trois points a_i, a_h, a_k soient en ligne droite, le point a_h entre les deux autres; on prendra l'intégrale entre les limites a_i et a_k en suivant un chemin $a_i lmna_k$ formé des deux lignes droites $a_i l$ et na_k et d'une demi-circonférence lmn d'un très-petit rayon décrite autour du point a_h. De même, si deux des points u_i, u_h sont constamment en ligne droite avec un des points a, tel que a_i, le point u_h entre les deux autres, on prendra l'intégrale $(a_i u_i)$ suivant un chemin déterminé ne passant en général par aucun autre des points critiques, par exemple une demi-circonférence ou un arc de cercle joignant ces deux points. On opérerait d'une façon identique si trois des points u_i étaient constamment en ligne droite.

Enfin on a supposé que chacune des intégrales $(v_i v_h)$ avait un sens. La fonction $f(x, u)$ contenant un certain nombre de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ etc., si l'on peut disposer de ces paramètres de façon que toutes les intégrales aient un sens, pour les valeurs de ces paramètres comprises entre certaines limites, chacune des intégrales vérifiera une équation différentielle d'ordre $m - 1$ dont les coefficients dépendent de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_p$. Prenons maintenant une de ces intégrales en particulier; on peut chercher à vérifier directement qu'elle satisfait à l'équation différentielle, par exemple en développant cette intégrale suivant les puissances croissantes de x et en substituant dans l'équation. Il est clair que les grandeurs respectives des quantités λ n'interviennent nullement dans le calcul; la vérification devant se faire pour toutes les valeurs de ces quantités comprises entre certaines limites, elle aura lieu dans tous les cas, pourvu que l'intégrale considérée conserve un sens.

(11). Il n'a été question jusqu'ici que de valeurs finies pour u; la considération du point ∞ va nous conduire à d'autres conséquences. Attribuons à x une valeur fixe, en dehors des coupures, et soient $v_1, v_2, \ldots . v_m$

les m points critiques, joints dans l'ordre qui a été fixé plus haut (nº 8). Soit C une courbe fermée comprenant à son intérieur tous ces points critiques; $f(x, u)$ sera en général une fonction multiforme de u à l'extérieur de C. Comme cas particulier, il pourra arriver que le point $u = \infty$ soit un pôle ou même un point ordinaire pour cette fonction. Nous examinerons successivement ces trois hypothèses.

Considérons le polygone $v_1 v_2 \ldots . v_m v_1$ ayant pour sommets tous les points critiques; à partir de chacun des sommets, tirons une ligne droite extérieure à ce polygone et s'étendant jusqu'à l'infini dans le plan. Si la fonction $f(x, u)$ n'est pas uniforme à l'extérieur de ce polygone, ce qui est le cas général, et si chacune des intégrales $\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du$, prise suivant la ligne droite dont il vient d'être question, a un sens, ces nouvelles intégrales représentent des fonctions de x qui vérifient la même équation différentielle que les précédentes. On pourrait étudier ces intégrales définies par des procédés analogues à ceux qui ont été employées plus haut; mais il nous suffit de démontrer qu'elles s'expriment linéairement au moyen des premières. Attribuons toujours à x une valeur constante; $f(x, u)$ devient une fonction de la seule variable u qui sera uniforme à l'extérieur du polygone $v_1 v_2 \ldots . v_m$ (fig. 9) pourvu qu'on regarde la ligne indéfinie $v_1 L$ comme une coupure.

En des points u', u'' infiniment voisins de cette coupure, la fonction $f(x, u)$ prend des valeurs $f(x, u')$, $f(x, u'')$ dont le quotient K est une constante différente de l'unité. Du point v_1 comme centre avec un très-grand rayon R décrivons une circonférence; l'application du théorème de Cauchy au contour $v_1 L' M_1 L_2 v_2 v_1$ donne la relation

$$(v_1 L') = (v_1 v_2) + (v_2 L_2) + (L_2 M_1 L')$$

qui devient, quand on y fait croître indéfiniment le rayon R

$$\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du - \int_{v_2}^{\infty} f(x, u)\, du = \int_{v_1}^{v_2} f(x, u)\, du,$$

l'intégrale $\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du$ étant prise suivant la ligne $v_1 L'$ infiniment voisine

de la coupure $v_1 L$. On établira pareillement une suite d'équations analogues

$$\int_{v_2}^{\infty} f(x,\ u)\,du - \int_{v_3}^{\infty} f(x,\ u)\,du = \int_{v_2}^{v_3} f(x,\ u)\,du.$$

. . . .

. . . .

$$\int_{v_m}^{\infty} f(x,\ u)\,du - \left[\int_{v_1}^{\infty} f(x,\ u)\,du\right] = \int_{v_m}^{v_1} f(x,\ u)\,du;$$

dans cette dernière égalité, $\left[\int_{v_1}^{\infty} f(x,\ u)\,du\right]$ représente l'intégrale $\int f(x, u)\,du$, prise suivant une ligne $v_1 L''$ infiniment rapprochée de la coupure $v_1 L$, mais du côté opposé à $v_1 L'$; or, aux deux bords de la ligne $v_1 L$, $f(x, u)$ prend des valeurs dont le rapport est K. On aura donc

$$\left[\int_{v_1}^{\infty} f(x,\ u)\,du\right] = K \int_{v_1}^{\infty} f(x,\ u)\,du;$$

en ajoutant alors membre à membre toutes les égalités précédentes, on en déduit

$$(1 - K) \int_{v_1}^{\infty} f(x,\ u)\,du = \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x,\ u)\,du + \int_{v_m}^{v_1} f(x,\ u)\,du$$

Puisqu'on suppose K différent de l'unité, on tirera de cette dernière équation $\int_{v_1}^{\infty} f(x,\ u)\,du$, et au moyen des égalités précédentes, on calculera de proche en proche $\int_{v_2}^{\infty} f(x,\ u)\,du$, $\int_{v_3}^{\infty} f(x,\ u)\,du$ . . . . etc.

12). Le raisonnement ne s'applique plus lorsque la fonction $f(x, u)$ est une fonction uniforme de u en dehors du polygone ayant pour sommets les points $v_1, v_2, \ldots . v_m$. Supposons d'abord que les intégrales $\int_{v_i}^{\infty} f(x,\ u)$

aient un sens, de telle sorte que l'intégrale $\int f(x, u)\,du$ prise le long d'un contour fermé C entourant tous les points critiques soit nulle. Nous considérerons un contour formé de la manière suivante; les points v_1, v_2, ... v_m étant joints dans le même ordre que précédemment, entourons chacun d'eux d'un cercle de rayon infiniment petit et joignons ces cercles entre eux par des lignes droites parallèles et infiniment rapprochées des droites qui joignent les points critiques eux-mêmes. Nous formons ainsi une figure telle que la figure (10); l'intégrale $\int f(x, u)\,du$ prise le long du contour $abnc \ldots\ldots dpeflf'e'p'd' \ldots\ldots c'n'b'a'ma$ est nulle par hypothèse.

On a donc la relation

$$(ab) + \ldots\ldots + (ef) + (f'e') + \ldots\ldots + (b'a') + (bnc) + \ldots\ldots + (flf') + \ldots\ldots + (a'ma) = 0$$

Admettons, pour fixer les idées, que le dernier point v_m est véritablement un point de ramification pour la fonction $f(x, u)$ de telle sorte qu'en deux points infiniment voisins sur les lignes ef, $e'f'$ cette fonction ait des valeurs différentes. On aura alors $(ef) + (f'e') = C(ef)$, C étant différent de zéro. Si maintenant on fait tendre vers zéro tous les rayons des petites circonférences, on aboutit à une relation entre les $m - 1$ intégrales

$$(v_1v_2),\ (v_2v_3),\ \ldots\ldots\ (v_{m-1}v_m),$$

où le coëfficient de $(v_{m-1}v_m)$ est différent de zéro. On pourra donc en tirer $(v_{m-1}v_m)$ exprimé linéairement au moyen des $m - 2$ intégrales

$$(v_1v_2),\ (v_2v_3),\ \ldots\ldots\ (v_{m-2}v_{m-1})$$

et, d'après ce qu'on a vu plus haut, toutes les intégrales (v_iv_h) s'exprimeront de la même manière au moyen de ces $m - 2$ fonctions. Toutes ces intégrales définies satisfont par conséquent à une *équation différentielle linéaire d'ordre $m - 2$ à coefficients uniformes.*

En se reportant au précédent paragraphe, on voit que les intégrales telles que $\int_{v_i}^{\infty} f(x, u)\,du$ pourront s'exprimer linéairement au moyen des intégrales (v_iv_h) et d'une nouvelle intégrale, par exemple $\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\,du$. Comme les fonctions (v_iv_h) se réduisent à $m - 2$ d'entre elles, il en résulte

que toutes les intégrales se rapportant à la fonction $f(x, u)$ s'expriment linéairement au moyen de $m - 1$ d'entre elles, et, par suite, qu'elles vérifient encore une équation différentielle linéaire d'ordre $m - 1$ à coefficients uniformes. Mais cette équation ne sera pas *irréductible,* puisqu'elle admet toutes les intégrales d'une équation d'ordre $m - 2$, ayant aussi ses coefficients uniformes.

Enfin il peut arriver que la fonction $f(x, u)$ soit une fonction uniforme de u à l'extérieur d'un contour renfermant tous les points v_i sans que les intégrales $\int_{v_i}^{\infty} f(x, u)\, du$ aient un sens. Dans ce cas l'intégrale $\int f(x, u)\, du$, prise le long d'un contour entourant tous les points critiques ne sera plus nulle, en général; mais on pourra, comme tout-à-l'heure l'exprimer linéairement au moyen des intégrales $(v_1 v_2)$, $(v_2 v_3)$, ... $(v_{m-1} v_m)$, de sorte qu'elle définit une fonction de x qui satisfait à la même équation différentielle. Il est facile de trouver la valeur de cette intégrale; imaginons qu'on ait pris comme contour d'intégration une circonférence ayant pour centre le point $u = 0$, et contenant à son intérieur tous les points v. Par la transformation $u = \frac{1}{t}$, elle devient

$$\int f\left(x, \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2},$$

cette dernière étant prise le long d'un petit cercle entourant le point $t = 0$, et ne contenant d'autre point singulier que l'origine. La valeur de cette intégrale est précisément $2i\pi R(x)$, $R(x)$ désignant le résidu de la fonction $f\left(x, \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}$, relatif au point singulier $t = 0$. D'après ce qui a été dit sur la fonction $f(x, u)$, ce résidu doit vérifier une équation différentielle de la forme

$$\frac{dR(x)}{dx} = R(x) \times G(x)$$

$G(x)$ étant une fonction uniforme de x.

En résumé, on voit que lorsque la fonction $f(x, u)$ est uniforme dans le voisinage du point $u = \infty$, l'équation différentielle d'ordre $m - 1$ n'est pas *irréductible.*

(13). Étant donnée une fonction $f(x, u)$ de la forme de celles que j'étudie, appelons E l'équation d'ordre $m-1$ qui est vérifiée par toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$. Supposons que l'on ait reconnu, par un moyen quelconque, que l'une de ces intégrales satisfait à une certaine équation différentielle linéaire à coefficients uniformes E', d'ordre $m-1$. Admettons en outre que cette équation est irréductible. Elle devra forcément être identique avec E; sans quoi on pourrait former une équation d'ordre moindre admettant une intégrale de E'. On pourra donc en conclure que toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$ relatives à $f(x, u)$ satisfont à la même équation. Ainsi, on sait depuis Euler que l'intégrale définie

$$y = \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} \, du,$$

pourvu qu'elle ait un sens, satisfait à l'équation différentielle

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

D'après ce qui précède, on peut en conclure immédiatement qu'il en est de même de chacune des intégrales $\int_g^h u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} \, du$, g et h désignant l'une des quantités $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$. (Jacobi, *Journal de Crelle tome LVI)*. Nous verrons plus loin d'autres applications de cette remarque.

(14). Nous avons défini les points $v_1, v_2, \ldots . v_m$ comme les points singuliers de la fonction $f(x, u)$, où l'on suppose x constant. Mais, au fond, le raisonnement n'exige pas que ces valeurs soient véritablement des valeurs singulières; la seule condition nécessaire est que $f(x, u)$ soit holomorphe pour toute valeur de u différente de $v_1, v_2 \ldots . v_m, \infty$. On peut admettre que certains des points v sont des points ordinaires pour la fonction et les conclusions précédentes ne cessent pas de s'appliquer; mais il faut remarquer que l'équation E ne sera plus irréductible. Je suppose, pour fixer les idées, que $f(x, u)$ admette les trois points critiques v_1, v_2, v_3 et n'en admette pas d'autre, abstraction faite du point $v = \infty$. D'après le théorème général, les intégrales définies $(v_1 v_2)$, $(v_2 v_3)$, $(v_1 v_3)$ satisfont à

une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients uniformes; soit E' cette équation. Soit maintenant v_4 un point ordinaire pour $f(x, u)$; le théorème I s'applique encore aux six intégrales définies

$$(v_1v_2),\ (v_1v_3),\ (v_1v_4),\ (v_2v_3),\ (v_2v_4),\ (v_3v_4),$$

et ces six intégrales doivent vérifier une équation linéaire du 3ème ordre E. Mais cette équation E n'est pas irréductible, puisqu'elle admet toutes les intégrales de l'équation E'.

(15). Je terminerai ce chapitre par l'étude d'un cas particulier intéressant, où les intégrales présentent une grande analogie avec les intégrales étudiées par Mr Hermite. La fonction $f(x, u)$, quand on y regarde x comme constant, admet toujours m points singuliers, qui se partagent en deux catégories: les uns sont des points de ramification, les autres des pôles ou même des points singuliers essentiels, mais $f(x, u)$ reste uniforme dans le voisinage. Soient $v_1, v_2, \ldots v_r$ les premiers, et $w_1, w_2, \ldots w_s$ les seconds; $r + s = m$. Je conserve les hypothèses précédemment admises relativement à la fonction $f(x, u)$, à la disposition des points singuliers et aux intégrales définies telles que (v_iv_h). Supposons que l'on ait établi, comme plus haut, un ou plusieurs systèmes de coupures partageant le plan en un certain nombre de régions. A l'intérieur de l'une quelconque de ces régions, toutes les intégrales (v_iv_h) peuvent s'exprimer linéairement au moyen de $r-1$ d'entre elles et des résidus de $f(x, u)$ relatifs aux points singuliers $w_1, w_2, \ldots w_s$, résidus que j'appellerai $R_1(x), R_2(x), \ldots R_s(x)$. Imaginons, en effet, que l'on ait numéroté les points $v_1, v_2, v_3, \ldots v_r$ dans un ordre tel que la ligne droite v_1v_i laisse d'un même côté tous les points v d'indice inférieur à i et de l'autre côté tous les points d'indice supérieur. On pourra alors reprendre la démonstration du n° 8; la seule différence est qu'à l'intérieur de l'un des triangles tels que $v_hv_{i+1}v_g$ il pourra se trouver un ou plusieurs des points w. Si, par exemple, à l'intérieur de ce triangle se trouve le point w_k, la fonction $f(x, u)$ ne cesse pas d'être uniforme à l'intérieur de ce triangle et le théorème de Cauchy donne la relation

$$(v_hv_{i+1}) + (v_{i+1}v_g) + (v_gv_h) = \pm\, 2i\pi R_k(x),$$

où $R_k(x)$ a le sens qui lui a été attribué tout-à-l'heure. Le reste de la démonstration s'achève comme au n° 8 et on voit que les intégrales telle que (v_iw_h), (w_iw_h), qui n'ont plus de sens dans ce cas, se trouvent tout naturellement remplacées par les résidus $R_1(x)$, $R_2(x)$, $\ldots$ $R_s(x)$.

Ces résidus définissent s fonctions de la variable x, qu'il est facile de caractériser. Si, en effet, on fait décrire à la variable x un contour fermé quelconque, le point singulier w_i, qui peut être variable avec x, reviendra à sa valeur initiale ou sa valeur finale sera égale à la valeur initiale d'un autre point singulier w_h. Comme $f(x, u)$ reprend, à une constante près, sa valeur initiale, lorsque x et u reprennent leurs valeurs initiales, la valeur finale du résidu $R_i(x)$ sera égale, a un facteur constant près, à la valeur initiale de $R_i(x)$ ou d'un autre résidu $R_h(x)$. Ces propriétés suffisent pour montrer que $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$ sont des intégrales d'une équation linéaire d'ordre s à coefficient uniformes. Cette équation ne sera pas irréductible, si l'équation $\Phi_1(x, w) = 0$ qui définit w comme fonction de x n'est pas indécomposable.

Voyons maintenant ce que deviennent les intégrales (v_iv_h) lorsqu'on fait décrire à la variable x un chemin quelconque. Il n'y a rien à ajouter à ce qui a déjà été dit pour le cas où un ou plusieurs des points v viennent à se trouver situés sur le chemin (v_iv_h). Il ne nous reste qu'à examiner ce qui se passe lorsqu'un ou plusieurs des points w viennent à être situés sur cette ligne. J'emploierai pour cela une méthode que j'ai déjà appliquée aux intégrales de Mr Hermite.[1] Soit C une ligne telle que, pour une valeur de x figurée par un point de cette ligne, un des points w traverse la ligne droite v_iv_h. Soit x_0 un point de cette courbe et ξ, ξ' deux points situés de part et d'autre de la courbe, très-voisins du point x_0. Figurons les positions respectives des points v_i, v_h, w_k lorsque x coïncide successivement avec les points ξ et ξ' et supposons, pour plus de géneralité, les trois points v_i, v_h, w_k variables avec x. Je suppose de plus que, lorsque x vient en x_0, un seul point w traverse la ligne v_iv_h; on pourra alors prendre un point l assez rapproché de cette ligne pour que le triangle lv_iv_h ne contienne à son intérieur aucun des points critiques de $f(\xi, u)$ et que le triangle $lv'_iv'_h$ ne contienne pas d'autre point singulier que w'_k de la fonction $f(\xi', u)$ (fig. 11).

La fonction $f(\xi, u)$ étant holomorphe à l'intérieur du triangle lv_iv_h, on aura

$$(v_iv_h) = (v_il) + (lv_h)$$

On pourra donc remplacer l'intégrale (v_iv_h) par la somme des deux intégrales (v_il), (lv_h). Lorsque x va de ξ en ξ', v_i et v_h viennent respective-

[1] Voir le premier volume des Acta, page 190.

ment en v'_i, v'_h, mais chacune des intégrales définies (lv_i), (lv_h) reste une fonction uniforme et continue de x; de sorte qu'aux environs du point ξ' la continuation analytique de la fonction sera encore représentée par la somme

$$(v'_i l) + (l v'_h);$$

$f(\xi', u)$ n'est plus holomorphe à l'intérieur du triangle $lv'_i v'_h$, mais elle est encore uniforme et, en appliquant de nouveau le théorème de Cauchy, on aboutit a la relation

$$(v'_i l) + (l v'_h) = (v'_i v'_h) - 2i\pi R_k(\xi'),$$

$R_k(\xi')$ représentant le résidu de $f(\xi', u)$ relatif au point singulier w'_k. La fonction qui était représentée par $(v_i v_h)$ avant que la variable n'ait franchi la coupure se trouve donc représentée, après le passage, par le symbole

$$(v_i v_h) - 2i\pi R_k(x)$$

La démonstration s'applique évidemment, quel que soit le nombre des points w qui traversent la ligne $v_i v_h$. Comme on peut répéter le raisonnement chaque fois que la variable franchit une coupure, on est conduit aux conclusions suivantes: si l'on considère toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$ et les résidus $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$, quand on fait décrire à la variable x un chemin fermé quelconque ne passant par aucun des points pour lesquels les valeurs v ou w ne soient pas toutes distinctes ou cessent d'être holomorphes, les valeurs finales de ces fonctions sont liées aux valeurs initiales par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants.

Donc:

Théorème II. Toutes les intégrales $(v_i v_h)$ satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $m - 1$ à coefficients uniformes, et cette équation admet comme solutions les s résidus $R_1(x)$, $R_2(x)$ .... $R_s(x)$.

En rapprochant ce résultat de celui qui a été établi au n° 14, on voit que l'équation générale d'ordre $m - 1$ admettra des intégrales appartenant à une équation d'ordre moins élevé à coefficients uniformes, toutes les fois que la fonction $f(x, u)$ sera uniforme dans le voisinage de l'un des points que nous avons considérés comme les points singuliers de cette fonction.

(16). Les intégrales de Mr Hermite peuvent, dans certains cas particuliers, se ramener aux précédentes. Soit $F(x, u)$ une fonction holomorphe

de x et de u et $G(x, u)$ un polynôme de degré $m-2$ en u dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x. Le quotient $\frac{F(x, u)}{G(x, u)}$ admet $m-2$ pôles variables avec x, qui sont donnés par l'équation $G(x, u) = 0$. Désignons par $u_1, u_2, \ldots u_{m-2}$ ces racines et par $R_1(x)$, $R_2(x), \ldots R_{m-2}(x)$ les résidus correspondants de la fonction $\frac{F(x, u)}{G(x, u)}$. Soient maintenant t_0, t_1 deux constantes quelconques, l'intégrale définie

$$\Phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x, u)}{G(x, u)}\, du$$

représente une fonction bien déterminée de x sauf pour les points situés sur certaines courbes, formant des coupures pour cette intégrale. D'après ce qui précède la fonction $\Phi(x)$ constitue avec $R_1(x), R_2(x), \ldots R_{m-2}(x)$ un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire d'ordre $m-1$ à coefficients uniformes. La fonction représentée dans une certaine partie du plan par $\Phi(x)$ sera représentée, après que la variable aura franchi un nombre quelconque de coupures, par

$$\Phi(x) + 2M_1 i\pi R_1(x) + 2M_2 i\pi R_2(x) + \ldots$$

$M_1, M_2, \ldots$ étant des nombres entiers qu'il serait facile de calculer.

La théorie précédente exige essentiellement que certains des points critiques de la fonction $f(x, u)$ soient variables avec x. Dans le cas contraire, elle nous apprend seulement que les intégrales considérées représentent des fonctions uniformes. Telle est par exemple l'intégrale

$$y = \int_0 (u^2 - 1)^m \cos ux\, du,$$

qui se présente dans l'étude des transcendantes de Bessel. De même l'intégrale

$$y = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 1}\, du,$$

lorsque $\lambda - 1$ est un nombre entier positif, représente une fonction uniforme de x, qui n'est autre qu'un polynôme.

II.

(17). L'application de la théorie précédente à la fonction

$$f(x,\ u) = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

se fait immédiatement, et conduit d'une façon presque intuitive aux résultats connus. En particulier, on peut en déduire tous les cas où l'équation de la série hypergéométrique admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est une fonction rationnelle de x. Si l'on se reporte, en effet, aux paragraphes 12, 13, 14 et 15, on voit qu'il suffit pour cela que $f(x,\ u)$ soit uniforme dans le voisinage de l'une des valeurs $0,\ 1,\ \frac{1}{x},\ \infty$, c'est-à-dire que l'un des nombres $\alpha,\ \beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\beta$ soit un nombre entier. Ces cas sont du reste les seuls où l'équation de la série hypergéométrique admette une intégrale de cette forme.

Supposons, par exemple, que $\alpha+1-\gamma$ soit égal à un nombre entier négatif, de telle sorte que la fonction $f(x,\ u)$ soit uniforme dans le voisinage du point $u=\infty$. L'équation différentielle devra admettre comme intégrale le résidu de la fonction $f\left(x,\ \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}$, relatif au pôle $t=0$.

$$f\left(x,\ \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} = t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(t-x)^{-\alpha} = x^{-\alpha}\,t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha};$$

posons $\alpha+1-\gamma=-m$;

$$f\left(x,\ \frac{1}{t}\right)t^2 = x^{-\alpha}\,t^{-1-m}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}$$

Ce résidu sera égal au produit de $x^{-\alpha}$ par le coëfficient de t^m dans le développement du produit $(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}$ suivant les puissances croissantes de t. Or on a

$$(1-t)^{\gamma-\beta-1} = 1 + \frac{\beta+1-\gamma}{1}t + \frac{(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)}{1\,.\,2}t^2 + \ldots.$$

$$+\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots.(\beta+m-\gamma)}{1\,.\,2\ldots.m}t^m + \ldots.$$

$$\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}\frac{t}{x}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\frac{t^2}{x^2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{1\,.\,2\ldots m}\frac{t^m}{x^m}+\ldots$$

Le coefficient de t^m dans le produit sera donc

$$\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots(\beta+m-\gamma)}{1\,.\,2\ldots m}+\frac{\alpha(\beta+1-\gamma)\ldots(\beta+m-1-\gamma)}{1\,.\,1\,.\,2\ldots(m-1)}\frac{1}{x}+\ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{1\,.\,2\ldots m}\frac{1}{x^m},$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots(\beta+m-\gamma)}{1\,.\,2\ldots m}\left\{1+\frac{\alpha(-m)}{1.(\gamma-\beta-m)}\frac{1}{x}+\frac{\alpha(-m)(-m+1)}{1\,.\,2.(\gamma-\beta-m)(\gamma-\beta-m+1)}\frac{1}{x^2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)(-m)(-m+1)\ldots(-m+m-1)}{1\,.\,2\ldots m(\gamma-\beta-m)\ldots(\gamma-\beta-1)}\frac{1}{x^m}\right\}.$$

Le polynôme entre parenthèses n'est autre que $F\left(\alpha,-m,\gamma-\beta-m,\frac{1}{x}\right)$ ou $F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right)$. Le résidu cherché est donc égal, à un facteur constant près, au produit

$$x^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right)$$

Si β est nul ou égal à un nombre entier négatif, on trouve de même que le résidu de $f(x, u)$ relatif au pôle $u=0$ est égal à

$$\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots(\beta+m-\gamma)}{1\,.\,2\ldots m}F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

(18). Prenons encore l'exemple traité par M. Pochammer;

$$f(x,u)=(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}$$

Le théorème général nous apprend que chacune des intégrales définies

$$y=\int_g^h(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités a_1, a_2, ... a_n, x, ∞, pourvu qu'elle ait un sens, doit satisfaire à une équation linéaire d'ordre n à coefficients uniformes, dont les points singuliers à distance finie sont précisément les n points, a_1, a_2, ... a_n. Rappelons d'abord en quelques mots comment on peut former cette équation et supposons que λ n'est pas un nombre entier, condition nécessaire pour que l'équation obtenue soit irréductible. D'après une remarque faite antérieurement (n° 13), il suffit de former l'équation à laquelle satisfait l'intégrale définie

$$y = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 1} du,$$

où les deux limites a_i, a_h sont finies et indépendantes de x, et où l'on suppose que les parties réelles de b_i et de b_h soient positives, de façon que cette intégrale ait un sens. On aura:

$$\frac{dy}{dx} = -(\lambda - 1) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 2} du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 3} du,$$

. . . .

$$\frac{d^py}{dx^p} = (-1)^p (\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - p) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - p - 1} du$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n (\lambda - 1) \dots (\lambda - n) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n - 1} du$$

Soient maintenant P_0, P_1, P_2, ... P_n, $(n + 1)$ fonctions de x; posons

$$\varphi(y) = P_0 \frac{d^ny}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y$$

En remplaçant y et ses dérivées par les expressions précédentes, il vient:

$$\varphi(y) = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n - 1} F(u)\, du,$$

$F(u)$ ayant la valeur suivante,

$$F(u) = (-1)^n (\lambda - 1) \dots (\lambda - n) P_0 + (-1)^{n-1} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)(u - x) P_1 \pm \dots$$
$$\dots - (\lambda - 1)(u - x)^{n-1} P_{n-1} + (u - x)^n P_n$$

Posons encore

$$f_1(u) = (u - a_1)^{b_1} (u - a_2)^{b_2} \dots (u - a_n)^{b_n} (u - x)^{\lambda - n};$$

on aura

$$\frac{df_1(u)}{du} = (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n - 1} \Psi(u),$$

où

$$\Psi(u) = \sum_{i=1}^{i=n} b_i (u - a_1) \dots (u - a_{i-1})(u - a_{i+1}) \dots (u - a_n)(u - x) + (\lambda - n)(u - a_1) \dots (u - a_n);$$

$F(u)$ et $\Psi(u)$ sont deux fonctions entières de u de degré n; si on peut disposer des $n + 1$ coefficients P_0, P_1, ... P_n de façon que ces deux polynômes soient identiques, on aura

$$\varphi(y) = f_1(a_h) - f_1(a_i) = 0$$

Il est aisé de voir que l'identification est toujours possible. Pour plus de commodité posons $u = x + z$. On aura

$$F(x + z) = (-1)^n (\lambda - 1) \dots (\lambda - n) P_0 + (-1)^{n-1} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) P_1 z \pm \dots$$
$$\dots - (\lambda - 1) P_{n-1} z^{n-1} + P_n z^n,$$

$$\Psi(x + z) = \Psi(x) + \frac{z}{1} \Psi'(x) + \frac{z^2}{1 \cdot 2} \Psi''(x) + \dots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \dots n} \Psi^n(x).$$

Si l'on écrit que ces deux polynômes en z sont identiques, on obtient immédiatement pour les fonctions inconnues P_0, P_1, ... P_n les valeurs suivantes:

$$P_0 = (-1)^n \frac{\Psi(x)}{(\lambda - 1)\ldots.(\lambda - n)},$$

$$P_1 = (-1)^{n-1} \frac{\Psi'(x)}{(\lambda - 1)\ldots.(\lambda - n + 1)}.$$

. . . .

$$P_{n-1} = (-1) \frac{\Psi^{(n-1)}(x)}{(\lambda - 1)\, 1\,.\,2\ldots.(n-1)},$$

$$P_n = \frac{\Psi^{(n)}(x)}{1\,.\,2\ldots.n}.$$

P_0 sera une fonction entière de x de degré n; P_1 une fonction entière de degré $n - 1$ . . . . etc., et P_n une constante. En particulier, on aura

$$P_0 = (-1)^n \frac{(x - a_1)(x - a_2)\ldots.(x - a_n)}{(\lambda - 1)\ldots.(\lambda - n + 1)};$$

ce qui montre bien que les seuls points singuliers à distance finie pour l'équation

$$\varphi(y) = 0$$

sont les points a_1, a_2, ... a_n.

(19). La représentation des solutions de l'équation $\varphi(y) = 0$ par des intégrales définies permet aussi de trouver très-simplement la forme d'un système fondamental d'intégrales dans le voisinage d'un point singulier. Dans le voisinage du point singulier a_1 par exemple, les $n - 1$ intégrales définies

$$\int_{a_2}^{\infty} f(x, u)\, du, \qquad \int_{a_3}^{\infty} f(x, u)\, du, \;\ldots.\; \int_{a_n}^{\infty} f(x, u)\, du,$$

représentent $n - 1$ fonctions linéairement indépendantes qui sont holomorphes pour $x = a_1$, tandis que l'intégrale

$$\int_{a_1}^{\infty} f(x, u)\, du$$

définit une fonction de x qui est multipliée par $e^{\pm 2\pi i(\lambda + b_1)}$ lorsque x tourne autour du point a_1. En effet, par le changement de variable

$$u = a_1 + t(x - a_1),$$

elle prend la forme

$$(x-a_1)^{\lambda+b_1-1}\int_0^1 \{a_2 - a_1 - t(x-a_1)\}^{b_2-1}\dots\{a_n - a_1 - t(x-a_1)\}^{b_n-1} t^{b_1-1}(1-t)^{\lambda-1}\,dt,$$

et la nouvelle intégrale représente une fonction holomorphe de x pour $x = a_1$.

Pour étudier la forme des intégrales de l'équation $\varphi(y) = 0$ dans le voisinage du point $x = \frac{1}{x'} = \infty$, imaginons un contour fermé C entourant tous les points critiques, par exemple une circonférence d'un très-grand rayon et faisons décrire à la variable x cette circonférence. Les $n - 1$ intégrales définies

$$\int_{a_1}^{a_i} f(x,\ u)\,du \qquad (i = 2,\ 3,\ \dots\ n)$$

représentent $n - 1$ fonctions linéairement indépendantes dont chacune se reproduit multipliée par le facteur $e^{\pm 2\pi\lambda i}$ lorsque la variable x décrit cette circonférence. Par exemple l'intégrale

$$\int_{a_1}^{a_2}(u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

peut s'écrire

$$x'^{1-\lambda}\int_{a_1}^{a_2}(u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\lambda-1}du,$$

et la nouvelle intégrale représente évidemment une fonction holomorphe de x pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$. L'équation $\varphi(y) = 0$ admet donc, dans le domaine de ce point, $n - 1$ solutions linéairement indépendantes telles que

$$x'^{1-\lambda}P(x')$$

$P(x')$ étant holomorphe pour $x' = 0$.

On reconnaît d'une façon analogue que l'intégrale définie

$$\int_r^{\infty} f(x,\ u)\,du$$

représente dans le voisinage du point $x = \frac{1}{x'} = \infty$ une fonction que l'on peut mettre sous la forme

$$x'^{n-\lambda-(b_1+b_2+\ldots+b_n)}\,Q(x')$$

$Q(x')$ étant holomorphe pour $x' = 0$.

(20). L'équation $\varphi(y) = 0$ admettra des intégrales appartenant à une équation à coefficients uniformes d'ordre inférieur à n toutes les fois que la fonction $f(x, u)$ sera uniforme dans le voisinage de l'un des points singuliers $a_1, a_2, \ldots a_n, x, \infty$. Supposons, par exemple, que b_i soit un nombre entier; si $b_i - 1$ est positif, de façon que le point $u = a_i$ ne soit pas un point singulier, toutes les intégrales

$$\int_g^h f(x, u)\, du,$$

où g et h désignent l'une des quantités $a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n, x, \infty$, vérifient une même équation linéaire d'ordre $n - 1$ à coefficients uniformes. Mais si $b_i - 1$ est un nombre entier négatif, le point $u = a_i$ sera un pôle et les intégrales précédentes vérifieront une équation d'ordre n admettant comme intégrale particulière le résidu de la fonction $f(x, u)$, relatif au pôle $u = a_i$.

Dans le premier cas, on peut se proposer de former l'équation d'ordre $n - 1$; je suppose pour cela le point autour duquel $f(x, u)$ est uniforme rejeté à l'infini; (ce qu'il est toujours possible de faire par une transformation linéaire, sans changer la forme de l'expression). Cela revient à supposer que la somme $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \lambda$ est un nombre entier, et de plus que cette somme est inférieure ou au plus égale à $n - 1$, afin que l'intégrale $\int f(x, u)\, du$, prise le long d'une circonférence entourant tous les points critiques, soit nulle.

Il résulte de ce qui précède que toutes les intégrales définies $(a_i a_h)$ ou $(a_i x)$ doivent satisfaire à une même équation linéaire d'ordre $n - 1$ à coefficients uniformes. Il est aisé de former cette équation. Admettons, comme plus haut, que λ n'est pas un nombre entier et en outre que l'on a

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \lambda = n - 1$$

Soit

$$y = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 1}\, du;$$

on aura, comme tout à l'heure,

$$\frac{dy}{dx} = -(\lambda - 1) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 2}\, du,$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n}\, du;$$

P_0, P_1, ... P_{n-1} désignant n fonctions de x, posons encore

$$\varphi_1(y) = P_0 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-2} \frac{dy}{dx} + P_{n-1} y$$

On aura

$$\varphi_1(y) = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n} F_1(u)\, du,$$

$$F_1(u) = (-1)^{n-1} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) P_0 + (-1)^{n-2} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) P_1 (u - x) \pm \dots$$
$$\dots - (\lambda - 1) P_{n-2} (u - x)^{n-2} + P_{n-1} (u - x)^{n-1}$$

Soit encore

$$f_1(u) = (u - a_1)^{b_1} \dots (u - a_n)^{b_n} (u - x)^{\lambda - n + 1};$$

$$\frac{df_1(u)}{du} = (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n} \Psi_1(u),$$

$$\Psi_1(u) = \sum_{i=1}^{i=n} b_i (u - a_1) \dots (u - a_n)(u - x) + (\lambda - n + 1)(u - a_1) \dots (u - a_n)$$

Si, en choisissant convenablement les fonctions P_0, P_1, ... P_{n-1}, $F_1(u)$ est identique à $\Psi_1(u)$, on aura

$$\varphi_1(y) = f_1(a_h) - f_1(a_i) = 0$$

L'identification est toujours possible; car, à cause de la relation

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \lambda = n - 1,$$

$\Psi_1(u)$ est comme $F_1(u)$ une fonction entière de u de degré $n - 1$. Les coefficients $P_0, P_1, \dots P_{n-1}$ seront déterminés comme tout-à-l'heure.

De l'équation $\varphi_1(y) = 0$ d'ordre $n - 1$ on déduira par la différentiation une équation de même forme d'ordre $n - 1$

$$\varphi_2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qui est vérifiée par l'intégrale définie

$$\int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda' - 1} du$$

où l'on a $\lambda' = \lambda - 1$, de la même forme que la précédente, et qui n'en diffère que par le changement de λ en $\lambda - 1$. Pour cette nouvelle intégrale, on a

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \lambda' = n - 2$$

Par r différentiations successives on formerait de même l'équation d'ordre $n - 1$ qui est vérifiée par l'intégrale définie

$$\int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda' - 1} du,$$

où l'on a

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \lambda' = n - 1 - r$$

(21). Je considère enfin la fonction très-générale

$$f(x, u) = (u - a_1)^{b_1 - 1} (u - a_2)^{b_2 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} [\varphi_1(x, u)]^{\lambda_1 - 1} \dots [\varphi_q(x, u)]^{\lambda_q - 1}.$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_q$ sont des polynômes entiers en u, de degré $m_1, m_2, \dots m_q$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x, et je me borne au cas général où aucun des nombres b ou λ n'est égal à un nombre entier.

Soit

$$\Phi(x, u) = \varphi_1(x, u)\, \varphi_2(x, u) \dots \varphi_q(x, u);$$

$\Phi(x, u)$ est un polynôme entier en u de degré $p = m_1 + m_2 + \dots + m_q$. D'après le théorème général, chacune des intégrales définies

$$\int_{u_i}^{a_h} f(x, u)\, du, \qquad \int_{u_i}^{u_i} f(x, u)\, du, \qquad \int_{u_i}^{u_h} f(x, u)\, du,$$

où u_i, u_h désignent deux racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$, pourvu qu'elle ait un sens, doit satisfaire à une équation linéaire d'ordre $n + p - 1$ à coefficients uniformes. Il suffit, d'après ce qu'on a vu plus haut, de former une telle équation pour l'une des intégrales définies

$$y = \int_{u_i}^{a_h} f(x, u)\, du$$

On peut toujours, en désignant par $u_1, u_2, \dots u_p$ les p racines de l'équation

$$\Phi(x, u) = 0$$

et en faisant abstraction d'un facteur ne dépendant que de x, écrire

$$y = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - u_1)^{\lambda_1 - 1} \dots (u - u_p)^{\lambda_p - 1}\, du,$$

les nombres λ ayant la même valeur pour les racines d'un même groupe, tel que le groupe formé par les racines de l'équation $\varphi_i(x, u) = 0$.

Supposons que les parties réelles de b_i et de b_h soient positives, afin que l'intégrale considérée ait un sens, et considérons pour un moment $u_1, u_2, \dots u_p$ comme p variables indépendantes. Soient $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_p$ p nombres entiers positifs tels que

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p = n + p - 1$$

Entre la fonction y et les dérivées partielles, au nombre de $n+p-1$,

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial y}{\partial u_1}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}, & \dots & \frac{\partial^{\mu_1} y}{\partial u_1^{\mu_1}}, \\
\frac{\partial y}{\partial u_2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u_2^2}, & \dots & \frac{\partial^{\mu_2} y}{\partial u_2^{\mu_2}}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial y}{\partial u_p}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u_p^2}, & \dots & \frac{\partial^{\mu_p} y}{\partial u_p^{\mu_p}},
\end{array}$$

il existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots u_p$.

On a

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} = -(\lambda_1 - 1)\int_{a_i}^{a_h} (u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-2}\ldots(u-u_p)^{\lambda_p-1}\,du,$$

. . . .

$$\frac{\partial^{\mu_1} y}{\partial u_1^{\mu_1}} = (-1)^{\mu_1}(\lambda_1-1)\ldots(\lambda_1-\mu_1)\int_{a_i}^{a_h}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-\mu_1-1}\ldots$$

$$\ldots(u-u_p)^{\lambda_p-1}\,du,$$

et les autres dérivées partielles s'expriment d'une façon analogue. Soient maintenant

$$A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_{\mu_1},$$
$$B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_{\mu_2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$L_1,\ L_2,\ \ldots\ L_{\mu_p},\ M,$$

$n+p$ fonctions de $u_1, u_2, \ldots u_p$. Posons:

$$H(y) = \left|\begin{array}{l} A_1\dfrac{\partial^{\mu_1}y}{\partial u_1^{\mu_1}} + A_2\dfrac{\partial^{\mu_1-1}y}{\partial u_1^{\mu_1-1}} + \ldots + A_{\mu_1}\dfrac{\partial y}{\partial u_1} \\ + B_1\dfrac{\partial^{\mu_2}y}{\partial u_2^{\mu_2}} + \ldots\ldots + B_{\mu_2}\dfrac{\partial y}{\partial u_2} \\ + \ldots\ldots\ldots \\ + L_1\dfrac{\partial^{\mu_p}y}{\partial u_p^{\mu_p}} + \ldots\ldots + L_{\mu_p}\dfrac{\partial y}{\partial u_p} \\ + My \end{array}\right|$$

En remplaçant y et ses dérivées partielles par leurs expressions au moyen d'intégrales définies, on trouve:

$$H(y) = \int_{a_i}^{a_h}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-\mu_1-1}\ldots(u-u_p)^{\lambda_p-\mu_p-1}F(u)\,du,$$

$F(u)$ ayant la valeur suivante:

$$F(u) = \left| \begin{array}{l} (u-u_2)^{\mu_2} \ldots (u-u_p)^{\mu_p} \{(-1)^{\mu_1}(\lambda_1-1)\ldots(\lambda_1-\mu_1)A_1 + (-1)^{\mu_1-1}(\lambda_1-1)\ldots \\ \qquad \ldots(\lambda_1-\mu_1+1)A_2(u-u_1) \pm \ldots - (\lambda_1-1)A_{\mu_1}(u-u_1)^{\mu_1-1}\} \\ +(u-u_1)^{\mu_1}(u-u_3)^{\mu_3}\ldots(u-u_p)^{\mu_p}\{(-1)^{\mu_2}(\lambda_2-1)\ldots(\lambda_2-\mu_2)B_1 + (-1)^{\mu_2-1}(\lambda_2-1)\ldots \\ \qquad \ldots(\lambda_2-\mu_2+1)B_2(u-u_2) \pm \ldots - (\lambda_2-1)B_{\mu_2}(u-u_2)^{\mu_2-1}\} \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ +(u-u_1)^{\mu_1}\ldots(u-u_{p-1})^{\mu_{p-1}}\{(-1)^{\mu_p}(\lambda_p-1)\ldots(\lambda_p-\mu_p)L_1 \pm \ldots \\ \qquad \ldots - (\lambda_p-1)L_{\mu_p}(u-u_p)^{\mu_p-1}\} \\ + M(u-u_1)^{\mu_1}(u-u_2)^{\mu_2}\ldots(u-u_p)^{\mu_p}; \end{array} \right.$$

$F(u)$ est une fonction entière de u de degré $n+p-1$, contenant $n+p$ coefficients indéterminés.

Posons encore

$$f_1(u) = (u-a_1)^{b_1}\ldots(u-a_n)^{b_n}(u-u_1)^{\lambda_1-\mu_1}\ldots(u-u_p)^{\lambda_p-\mu_p};$$

on aura

$$\frac{df_1(u)}{du} = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-\mu_1-1}\ldots(u-u_p)^{\lambda_p-\mu_p-1}\Psi_1(u),$$

où

$$\Psi_1(u) = \sum_{i=1}^{i=n} b_i(u-a_1)\ldots(u-a_{i-1})(u-a_{i+1})\ldots(u-a_n)(u-u_1)\ldots(u-u_p)$$

$$+\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda_h-\mu_h)(u-a_1)\ldots(u-a_n)(u-u_1)\ldots(u-u_{h-1})(u-u_{h+1})\ldots(u-u_p);$$

$\Psi_1(u)$ est comme $F(u)$ une fonction entière de u de degré $n+p-1$. Si l'on peut disposer des $n+p$ coefficients A_i, B_i, ... L_i, M de façon que ces polynômes soient identiques, on aura

$$H(y) = f_1(a_h) - f_1(a_i) = 0,$$

et la proposition sera démontrée.

Pour le calcul des coefficients A_i, je remarque que $F(u)$ peut s'écrire

$$F(u) = (u - u_2)^{\mu_2} \ldots (u - u_p)^{\mu_p} \{(-1)^{\mu_1} (\lambda_1 - 1) \ldots (\lambda_1 - \mu_1) A_1 + (-1)^{\mu_1 - 1} (\lambda_1 - 1) \ldots$$

$$\ldots (\lambda_1 - \mu_1 + 1) A_2 (u - u_1) \ldots - (\lambda_1 - 1) A_{\mu_1} (u - u_1)^{\mu_1 - 1}\}$$

$$+ (u - u_1)^{\mu_1} G(u),$$

$G(u)$ désignant une fonction entière de u. Si l'on fait $u = u_1$, $F(u)$ se réduit à

$$(u_1 - u_2)^{\mu_2} \ldots (u_1 - u_p)^{\mu_p} (-1)^{\mu_1} (\lambda_1 - 1) \ldots (\lambda_1 - \mu_1) A_1,$$

et $\Psi_1(u)$ devient égal à $(\lambda_1 - \mu_1)(u_1 - a_1) \ldots (u_1 - a_n)(u_1 - u_2) \ldots (u_1 - u_p)$; on aura donc immédiatement la valeur de A_1; A_1 étant déterminé de cette façon, si dans l'égalité

$$F(u) = \Psi_1(u)$$

on fait passer dans le second membre le terme tout connu en A_1, on pourra supprimer le facteur commun $u - u_1$; puis, faisant de nouveau $u = u_1$, on aura une équation qui donnera A_2, et ainsi de suite. On déterminera de la même manière les coefficients $B_i, C_i, \ldots L_i$. Puisqu'on suppose que les nombres λ ne sont pas des nombres entiers, le calcul pourra toujours être continué et donnera pour ces coefficients des valeurs finies. Quant à M, on l'obtiendra, en donnant à u une valeur particulière différente de $a_1, a_2 \ldots a_n, u_1, \ldots u_p$ et en égalant les deux membres, par exemple en égalant les coefficients du terme en u^{n+p-1} dans $F(u)$ et dans $\Psi_1(u)$. On trouvera bien ainsi pour ces coefficients des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots u_p$. Remarquons de plus que $A_1, B_1, C_1, \ldots L_1$ seront toujours différents de zéro.

Au moyen de relations de la forme précédente, on pourra exprimer toutes les dérivées partielles de y au moyen de la fonction elle-même et de $n + p - 2$ de ses dérivées par des formules linéaires et homogènes, où les coefficients sont des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots u_p$. Je prendrai par exemple les $n + p - 2$ dérivées

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}, \ldots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial u_1^{n-1}}, \frac{\partial y}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial u_p}.$$

Les nombres positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots . \mu_p$ qui figurent dans la relation

$$H(y) = 0$$

sont assujettis à la seule condition

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots . + \mu_p = n + p - 1$$

Si l'on prend $\mu_1 = n$, $\mu_2 = \mu_3 = \ldots . = \mu_p = 1$, on aura une égalité d'où l'on pourra tirer $\frac{\partial^n y}{\partial u_1^n}$ en fonction des dérivées précédentes. Prenons ensuite

$$\mu_1 = n + 1, \qquad \mu_2 = \mu_3 = \ldots . = \mu_{p-1} = 1, \qquad \mu_p = 0,$$

on aura une relation d'où l'on pourra tirer $\frac{\partial^{n+1} y}{\partial u_1^{n+1}}$ exprimé au moyen de $\frac{\partial^n y}{\partial u_1^n}$ et des dérivées choisies. En se servant de la relation précédente, on pourra l'amener à ne contenir que les dérivées choisies. En continuant de proche en proche, on exprimera de la façon annoncée les dérivées successives

$$\frac{\partial^n y}{\partial u_1^n}, \ldots . \frac{\partial^{n+p-1} y}{\partial u_1^{n+p-1}}.$$

Faisons d'autre part

$$\mu_1 = n - 1, \qquad \mu_2 = 2, \qquad \mu_3 = \mu_4 = \ldots . = \mu_p - 1\,;$$

on obtient $\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}$; si l'on fait ensuite

$$\mu_1 = n - 2, \qquad \mu_2 = 3, \qquad \mu_3 = \mu_4 = \ldots . = \mu_p - 1,$$

on aura $\frac{\partial^3 y}{\partial u_1^3}$, que l'on pourra ramener, au moyen de la formule obtenue auparavant, à ne contenir que les dérivées choisies. En continuant de la sorte et en opérant de la même manière pour les autres dérivées partielles, on voit qu'on pourra exprimer comme il a été dit toutes les dérivées partielles jusqu'à celles d'ordre $n + p - 1$, où les dérivations sont effectuées par rapport à la même variable. La propriété s'étend immédiatement aux dérivées d'un ordre quelconque, mais cela n'est pas essentiel pour notre objet.

Considérons maintenant les dérivées partielles du second ordre telles que $\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2}$; on a

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} = -(\lambda_1 - 1)\int_{a_i}^{a_h} (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-2}\dots(u-u_p)^{\lambda_p-1}du,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u_2} = -(\lambda_2 - 1)\int_{a_i}^{a_h} (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-1}(u-u_2)^{\lambda_2-2}\dots(u-u_p)^{\lambda_p-1}du,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2} = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)\int_{a_i}^{a_h} (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-2}(u-u_2)^{\lambda_2-2}$$

$$\dots(u-u_p)^{\lambda_p-1}du.$$

Si P, Q désignent deux fonctions de $u_1, u_2, \dots u_p$, on aura

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2} - P\frac{\partial y}{\partial u_1} - Q\frac{\partial y}{\partial u_2} = \int_{a_i}^{a_h} (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-2}(u-u_2)^{\lambda_2-2}\dots$$

$$\dots(u-u_p)^{\lambda_p-1}F(u)\,du,$$

où

$$F(u) = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) + (\lambda_1 - 1)(u-u_2)P + (\lambda_2 - 1)(u-u_1)Q;$$

$F(u)$ est une fonction entière et du premier degré de u, qui sera identiquement nulle si l'on prend

$$P = \frac{\lambda_2 - 1}{u_2 - u_1}, \quad Q = \frac{\lambda_1 - 1}{u_1 - u_2}.$$

On a donc la relation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\lambda_2 - 1}{u_2 - u_1}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{\lambda_1 - 1}{u_1 - u_2}\frac{\partial y}{\partial u_2},$$

et d'un manière générale

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_h} = \frac{\lambda_h - 1}{u_h - u_i}\frac{\partial y}{\partial u_i} + \frac{\lambda_i - 1}{u_i - u_h}\frac{\partial y}{\partial u_h}.$$

Chaque dérivée partielle de y étant une fonction de même nature que la fonction y elle-même, en général une dérivée partielle telle que

$$\frac{\partial^m y}{\partial u_1^{a_1} \dots \partial u_i^{a_i} \, \partial u_h^{a_h} \dots}$$

s'exprimera au moyen des deux dérivées partielles d'ordre moindre

$$\frac{\partial^{m-1} y}{\partial u_1^{a_1} \dots \partial u_i^{a_i-1} \, \partial u_h^{a_h} \dots}, \qquad \frac{\partial^{m-1} y}{\partial u_1^{a_1} \dots \partial u_i^{a_i} \, \partial u_h^{a_h-1} \dots}.$$

En appliquant la formule de réduction autant de fois qu'il est nécessaire, on voit que chaque dérivée partielle où figurent des dérivations par rapport à des variables différentes s'exprime linéairement au moyen des dérivées partielles où les dérivations sont prises par rapport à la même variable. Finalement, toutes les dérivées partielles de la fonction y s'expriment au moyen de

$$y, \ \frac{\partial y}{\partial u_1}, \ \dots \ \frac{\partial^{n-1} y}{\partial u_1^{n-1}}, \ \frac{\partial y}{\partial u_2}, \ \dots \ \frac{\partial y}{\partial u_p},$$

par des formules linéaires et homogènes, où les coefficients sont des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \dots u_p$.

(22). Regardons maintenant y comme fonction de la seule variable x; on aura

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{du_i}{dx},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i^2} \left(\frac{du_i}{dx}\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{h=1}^{h=p} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_h} \frac{du_i}{dx} \frac{du_h}{dx} + \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{d^2 u_i}{dx^2};$$

. . . .

. . . .

En général $\frac{d^m y}{dx^m}$ s'exprime par des formules linéaires et homogènes au moyen des dérivées partielles de y par rapport à $u_1, u_2, \dots u_p$, les coefficients étant des fonctions rationnelles des racines u_i et de leurs dérivées.

En se servant des relations établies précédemment, on pourra amener les seconds membres à ne contenir que

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial u_1^{n-1}}, \frac{\partial y}{\partial u_2}, \dots \frac{\partial y}{\partial u_p},$$

et les formules ne cesseront pas d'être linéaires et homogènes. Si l'on suppose les dérivées

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{n+p-1}y}{dx^{n+p-1}},$$

exprimées de cette façon, on pourra entre ces $n+p-1$ équations éliminer les $n+p-2$ dérivées partielles intermédiaires, et on sera conduit à une relation linéaire et homogène entre

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{n+p-1}y}{dx^{n+p-1}}.$$

C'est l'équation que l'on voulait obtenir.

Les coefficients de cette équation seront des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \dots u_p$ et des dérivées de ces fonctions jusqu'à celles d'ordre $n+p-1$. Ces racines se partagent en un certain nombre de groupes, chaque groupe comprenant les racines qui sont données par une même équation à coefficients uniformes, telle que $\varphi_i(x, u) = 0$. L'exposant λ étant le même pour toutes les racines d'un même groupe, il est clair que les coefficients de l'équation obtenue seront des fonctions symétriques de ces racines et de leurs dérivées; ce seront par conséquent des fonctions uniformes de la variable x, que l'on pourra former connaissant les diverses équations,

$$\varphi_1(x, u) = 0, \qquad \varphi_2(x, u) = 0, \dots \varphi_q(x, u) = 0.$$

Si les coefficients de ces diverses équations sont des fonctions rationnelles, on voit, d'après la manière même dont on forme l'équation différentielle, que ses coefficients seront aussi des fonctions rationnelles de la variable.

III.

(23). Les résultats obtenus dans la première partie de ce travail peuvent être généralisés de différentes manières. Une extension qui s'offre d'elle-même est la suivante. Supposons que z soit une fonction de la variable u, contenant en outre deux paramètres arbitraires x et y, et conservons les autres hypothèses que nous avons admises relativement à cette fonction. Quand on attribue à x et à y des valeurs particulières x_1, y_1, z devient une fonction de la seule variable u, admettant les m points singuliers $v_1, v_2, \ldots v_m$. Si l'intégrale $\int_{v_i}^{v_h} z\,du$ a un sens, elle définit une fonction des deux variables indépendantes x et y, que l'on pourra continuer tant que ces variables resteront comprises à l'intérieur de certains contours. Admettons que toutes les intégrales de la même forme aient un sens tant que, parmi les m points $v_1, v_2, \ldots v_m$, il n'y en a pas trois en ligne droite. L'intégrale $(v_i v_h)$ par exemple définit une fonction de x et de y qui est représentée par le même symbole tant que ces variables ne prennent pas un couple de valeurs telles qu'un troisième des points v soit situé sur la ligne $v_i v_h$. Par un procédé absolument identique à celui qui a été employé dans la première partie, on reconnaît que, lorsque cette circonstance se présente, la continuation analytique de la fonction se trouve représentée par une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des intégrales de la même forme se rapportant à la même fonction.

Les conséquences sont analogues à celles qui ont été exposées plus haut. Les fonctions représentées par ces intégrales définies vérifient un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, analogues à ceux qui ont été considérés par Mr Appell dans son intéressant mémoire sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (*Journal de Résal, tome VIII 3ème Série*). Entre une de ces intégrales et $m - 1$ de ses dérivées partielles, il existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions uniformes de x et de y.

Les intégrales définies telles que

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{b_3-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent l'une des quantités 0, 1, x, y, ∞, intégrales qui ont été étudiées par Mr Picard (*Annales de l'Ecole Normale. 1881*), fournissent un exemple intéressant. On voit aussi comment les résultats peuvent être étendus indéfiniment en augmentant le nombre des variables indépendantes.

(24). Mais c'est en me plaçant à un autre point de vue que je me propose de généraliser le théorème fondamental. Soit $z = f_1(x, u)$ une fonction analytique multiforme des deux variables indépendantes x et u, jouissant des propriétés suivantes. Entre $n+1$ déterminations de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Si on attribue à x une valeur particulière x_1, $f_1(x_1, u)$ devient une fonction de la seule variable u, holomorphe pour toute valeur de u, sauf pour m valeurs particulières $v_1, v_2, \ldots v_m$. Supposons que toutes les intégrales définies

$$\int_{v_1}^{v_h} f_1(x, u)\,du$$

prises suivant une des lignes droites joignant deux points critiques, et où l'on adopte pour $f_1(x, u)$ une quelconque de ses déterminations, ait un sens tant que, parmi les points v, il n'y en a pas trois en ligne droite. L'intégrale $(v_i v_h)$ par exemple, quand on aura choisi la valeur de z que l'on prend dans l'intégration, représentera une fonction de la variable x que l'on pourra continuer sans aucune ambiguïté tant qu'aucun des autres points v ne viendra à traverser la ligne droite $v_i v_h$. On pourra donc établir un système de coupures divisant le plan en un nombre fini ou infini de régions distinctes, de telle sorte qu'à l'intérieur de l'une quelconque de ces régions toutes les intégrales précédentes aient un sens et représentent des fonctions analytiques de la variable x.

Je remarque d'autre part qu'à cause des hypothèses faites sur $f_1(x, u)$, toutes les intégrales prises suivant une même ligne droite se réduisent à n d'entre elles. Si l'on applique ensuite le théorème de Cauchy au contour de tous les polygones, ayant les points v pour sommets, à l'inté-

rieur desquels $f(x, u)$ est holomorphe, on obtient un certain nombre de nouvelles équations linéaires entre ces intégrales. En se reportant au procédé développé au n° 8, on reconnaît tout de suite que toutes ces intégrales s'expriment par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen de $n(m - 1)$ d'entre elles.

Faisons décrire à la variable x un chemin quelconque, assujetti à la seule condition que les m valeurs $v_1, v_2, \ldots v_m$ restent distinctes et finies. Les intégrales conservent un sens tant que trois des points v ne sont pas en ligne droite. Lorsque une ligne droite, telle que $v_i v_h$, viendra à être traversée par un autre des points v, v_k par exemple, l'intégrale définie $(v_i v_h)$ cessera d'avoir un sens, mais si on la remplace par la somme $(v_i v_k) + (v_k v_h)$, chacune de ces intégrales conserve un sens et la continuation de $(v_i v_h)$ se trouve représentée par une combinaison linéaire d'intégrales de la même nature.

En définitive, on est conduit à un système de fonctions analytiques telles que les intégrales $(v_i v_h)$ suffisent à les exprimer complètement dans une partie quelconque du plan. Si donc on fait décrire à la variable un contour fermé, ne passant par aucun des points pour lesquels les valeurs $v_1, v_2, \ldots v_m$ cessent d'être distinctes ou finies, les valeurs finales de nos fonctions seront liées aux valeurs initiales par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants. Comme elles se réduisent à $n(m - 1)$ d'entre elles, on a le théorème suivant:

Théorème III. Toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$, considérées comme fonctions de x, satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $n(m - 1)$ à coefficients uniformes.

Ce théorème donnerait lieu à une série de remarques, analogues à celles qui ont été développées dans la première partie. Le lecteur y suppléera bien aisément, ainsi qu'aux détails de la démonstration que je n'ai fait qu'indiquer, pour éviter de trop nombreuses répétitions.

Cette démonstration serait illusoire si toutes les intégrales définies, qui interviennent dans le raisonnement, ne pouvaient avoir un sens en même temps. Mais il est facile de s'assurer qu'il n'en est pas ainsi. Quand on attribue à x une valeur particulière x_1, z devient une fonction satisfaisant à une équation linéaire d'ordre n à coefficients uniformes, admettant pour points singuliers à distance finie les points $v_1, v_2, \ldots v_m$. Supposons que cette équation ait toutes ses intégrales régulières pour

$u = v_i$ et pour $u = \infty$. Soit r une racine de l'une des équations déterminantes fondamentales relatives aux points critiques $v_1, v_2, \ldots v_m$ et r' une des racines de l'équation relative au point $u = \infty$; entre ces racines on a la relation

$$\sum r + \sum r' = \frac{(m-1)n(n-1)}{2}$$

Pour que toutes les intégrales définies

$$\int_{v_i}^{v_h} z\,du, \qquad \int_{v_i}^{\infty} z\,du,$$

aient un sens, il faudra que l'on ait, pour toutes ces racines

$$1 + r > 0,$$

$$r' > 1,$$

et par conséquent

$$nm + \sum r + \sum r' > n,$$

condition compatible avec la précédente.

(25). On a vu, dans la première partie, que l'équation différentielle d'ordre $m-1$ n'était pas irréductible toutes les fois que la fonction $f(x, u)$ était uniforme dans le voisinage de certains des points v. Tout pareillement, si certaines branches de $f_1(x, u)$ sont holomorphes pour quelques-uns de ces points, on pourra trouver un système d'intégrales de la forme $(v_i v_h)$ qui vérifient une équation linéaire à coefficients uniformes d'un ordre inférieur à $n(m-1)$. J'examine plus loin deux exemples où cette particularité se présente et où la cause de cette réduction se trouve mise en évidence.

On peut encore généraliser le théorème III en supposant que la fonction $f_1(x, u)$, au lieu de dépendre d'un seul paramètre x, contient un nombre quelconque de paramètres variables $x_1, x_2, \ldots x_p$ et en conservant les autres hypothèses. Les intégrales $(v_i v_h)$ représentent alors des fonctions des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_p$, vérifiant un système d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles dont les coefficients sont des fonctions uniformes de ces variables.

(26). L'application du théorème précédent conduit à des propriétés intéressantes de certaines intégrales multiples et en particulier de certaines intégrales doubles, dont quelques-unes s'étaient déjà présentées dans les recherches de Mr APPELL (loc. cit. page 196). D'une manière générale soit $f(x, u, v)$ une fonction de trois variables indépendantes x, u, v, jouissant de propriétés analogues à celles de $f(x, u)$, dont il a été question dans la première partie. Toutes les déterminations de la fonction s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par certaines constantes; si l'on attribue à x et à v des valeurs particulières, $f(x, u, v)$ considérée comme fonction de u seulement admet un nombre *limité* n de valeurs singulières, $v_1, v_2, \ldots v_n$. Supposons que toutes les intégrales $(v_i v_h)$ aient un sens; d'après le théorème I, ces intégrales envisagées comme fonctions de v satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $n - 1$, dont les coefficients sont des fonctions uniformes de v et dépendent en outre du paramètre x. Admettons de plus que les points critiques de cette équation sont en nombre fini m, quel que soit x, et appelons-les $w_1, w_2, \ldots w_m$. Les intégrales définies $(v_i v_h)$ sont des branches d'une même fonction analytique des deux variables x et v, possédant précisément les propriétés de la fonction dont il est question dans le théorème III. Soit $\varphi(x, v)$ cette fonction; si les diverses intégrales

$$\int_{w_i}^{w_h} \varphi(x, v)\, dv$$

ont un sens, ce théorème nous apprend qu'elles vérifient une équation différentielle linéaire d'ordre $(n - 1)(m - 1)$ à coefficients uniformes. Cette équation admettra donc comme solutions un certain nombre d'intégrales doubles telles que

$$\int_{w_i}^{w_h} dv \int_{v_i}^{v_h} f(x, u, v)\, du$$

Il est bien aisé de voir comment la proposition peut être étendue à des intégrales triples ou à des intégrales multiples d'un ordre quelconque en augmentant le nombre des variables u, v, w .... etc., et comment on peut aussi l'étendre en supposant que la fonction sous le signe $\int$ dépend de plusieurs paramètres $x_1, x_2, \ldots x_p$.

Je n'ai pu parvenir à un procédé général pour former l'équation différentielle dans le cas d'une intégrale multiple, comme dans le cas d'une intégrale simple. Dans les exemples que j'examine ci-après on n'a pas besoin de former cette équation. Admettons que l'on ait reconnu qu'un certain nombre d'intégrales doubles de la forme précédente satisfont à une même équation linéaire d'ordre p à coefficients uniformes; si, par un moyen quelconque, on est parvenu à former une équation linéaire de cet ordre, ayant ses coefficients uniformes, qui est vérifiée par l'une de ces intégrales doubles, on pourra affirmer qu'elle est vérifiée par toutes les autres, pourvu toutefois que cette équation soit irréductible.

(27). Soit $f(x, u, v)$ l'expression suivante:

$$f(x, u, v) = u^{a_1-1} v^{a_2-1} (1-u)^{b_1-a_1-1} (1-v)^{b_2-a_2-1} (1-xuv)^{-a_3}$$

Si l'on regarde x et v comme constants, cette expression est une fonction de la seule variable u admettant les points singuliers

$$u = 0, \qquad u = 1, \qquad u = \frac{1}{vx}, \qquad u = \infty;$$

d'après le théorème I, chacune des intégrales

$$\omega = \int_g^h f(x, u, v)\, du,$$

g et h désignant l'une des quantités $0, 1, \frac{1}{vx}, \infty$, pourvu qu'elle ait un sens, regardée comme fonction de v, satisfait à une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes. Nous supposerons que les parties réelles des quantités a_1, $b_1 - a_1$, $1 - a_3$, $a_3 + 1 - b_1$ sont positives, de façon que toutes ces intégrales aient un sens. On a par exemple

$$\int_0^1 f(x, u, v)\, du = C v^{a_2-1} (1-v)^{b_2-a_2-1} F(a_3, a_1, b_1, vx)$$

Chacune de ces intégrales définies est donc une branche d'une fonction analytique multiforme des 2 variables v et x, telle qu'entre trois déterminations il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. De plus, quand on regarde x comme constant, chaque branche de la

fonction est holomorphe pour toute valeur de v sauf pour $v=0$, $v=1$, $v=\frac{1}{x}$, $v=\infty$. Les exposants de discontinuité relatifs à ces différents points critiques, sont respectivement

$$\begin{array}{lll} \text{pour } v=0 \ \ldots\ldots & a_2-1, & a_2-b_1, \\ \text{pour } v=1 \ \ldots\ldots & b_2-a_2, & b_2-a_2-1, \\ \text{pour } v=\frac{1}{x} \ \ldots\ldots & 0, & b_1-a_1-a_3, \\ \text{pour } v=\infty \ldots\ldots & a_1+2-b_2, & a_3+2-b_2\,; \end{array}$$

supposons que les parties réelles des quantités

$$a_1, \quad a_2+1-b_1, \quad b_2+1-a_2, \quad b_1+1-a_1-a_3, \quad a_1+1-b_2, \quad a_3+1-b_2,$$

soient positives, conditions compatibles avec les précédentes, comme il est aisé de s'en assurer. Si ω désigne l'une des branches de la fonction que nous venons de définir, toutes les intégrales

$$y=\int_{g'}^{h'}\omega\,du,$$

où g et h désignent l'une des quantités 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞, auront un sens et devront satisfaire à une équation linéaire à coefficients uniformes, quand on les regarde comme des fonctions de x. La règle générale donne 4 pour l'ordre de cette équation; mais on va voir qu'en laissant de côté quelques-unes de ces intégrales définies les intégrales restantes vérifient une équation du $3^{\text{ème}}$ ordre, ayant aussi ses coefficients uniformes.

Les fonctions $\omega=\int_g^h f(x, u, v)\,du$, considérées comme fonctions de v, vérifient une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels, admettant comme points singuliers les points 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞. Soit $\varphi(\omega)=0$ cette équation. A partir de chacun des points 0, 1, $\frac{1}{x}$, tirons une ligne

droite indéfinie; si nous considérons ces trois lignes comme des coupures, les diverses solutions de l'équation

$$\varphi(\omega) = 0$$

seront des fonctions uniformes de v dans toute l'étendue du plan. Désignons par ω_1 et ω_2 celles de ces solutions qui se comportent d'une manière simple dans le voisinage du point $v = \frac{1}{x}$; l'une d'elles ω_1 est holomorphe dans le voisinage de ce point. On a en effet, C désignant un facteur constant

$$\omega_1 = \int^{0} f(x,\ u,\ v)\, du = Cv^{a_2-1}(1-v)^{b_2-a_2-1} F(a_3,\ a_1,\ a_1+a_3+1-b_1,\ 1-vx)$$

La seconde ω_2 est représentée par l'intégrale

$$\int_1^{\frac{1}{vx}} f(x,\ u,\ v)\, du =$$

$$= C'v^{a_2-1}(1-v)^{b_2-a_2-1}(1-vx)^{b_1-a_1-a_3} F(b_1-a_3,\ b_1-a_1,\ b_1+1-a_1-a_3,\ 1-vx);$$

elle se reproduit multipliée par $e^{\pm 2\pi i(b_1-a_1-a_3)}$ lorsque v décrit un petit lacet autour du point $\frac{1}{x}$. Autour des points 0 et 1 comme centres, avec des rayons très-petits r, r' décrivons deux circonférences et décrivons en outre une circonférence d'un très-grand rayon ayant pour centre l'origine (fig. 12). Envisageons les deux contours fermés $ama'LML'b'nba$ et $am'a'LM'L'b'n'ba$, formés par des arcs de ces circonférences, la portion ab de l'axe réel et les lignes $a'L$ et $b'L'$, infiniment voisines de cet axe et situées au-dessus.

Toutes les intégrales de l'équation $\varphi(\omega) = 0$ sont holomorphes à l'intérieur du premier contour et l'application du théorème de Cauchy à l'une quelconque de ces intégrales donne la relation

$$(ama') + (a'L) + (LML') + (L'b') + (b'nb) + (ba) = 0$$

Faisons augmenter indéfiniment le rayon R et décroître les rayons r, r'; en appliquant successivement la relation précédente aux intégrales ω_1, ω_2, on parvient aux deux relations

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{0} \omega_1\, dv + \int_{0}^{1} \omega_1\, dv + \int_{1}^{+\infty} \omega_1\, dv = 0, \\ \int_{-\infty}^{0} \omega_2\, dv + \int_{0}^{1} \omega_2\, dv + \int_{1}^{+\infty} \omega_2\, dv = 0 \end{array}\right.$$

Je remarque ensuite que l'intégrale désignée par ω_1 est holomorphe à l'intérieur du contour $am'a'LM'L'b'n'a$; quand on part du point a avec cette intégrale ω_1, on parvient au point a', après avoir décrit l'arc $am'a'$ qui traverse la coupure $-\infty$ —— 0 avec une fonction qui sera représentée par $C\omega_1 + C''\omega_2$, C et C'' étant des constantes; on arrivera de même au point b' avec une fonction telle que $C_1\omega_1 + C_1'\omega_2$; de sorte que l'application du théorème de CAUCHY à ce nouveau contour nous donne une nouvelle relation telle que

$$(2)\qquad C\int_{-\infty}^{0} \omega_1\, dv + \int_{0}^{1} \omega_1\, dv + C_1\int_{1}^{+\infty} \omega_1\, dv + C'\int_{-\infty}^{0} \omega_2\, dv + C'_1\int_{1}^{+\infty} \omega_2\, dv = 0$$

Les relations (1) et (2) montrent que les six intégrales considérées s'expriment linéairement au moyen de trois d'entre elles; et il en serait de même si le point $\frac{1}{x}$ était situé dans la partie supérieure du plan.

Si nous faisons décrire à la variable x un chemin fermé quelconque ne coupant pas l'axe réel, les fonctions ω_1, ω_2 restent des fonctions continues de v pour toutes les valeurs réelles de v, sauf pour les valeurs 0 et 1. Les six intégrales conservent un sens; mais ω_1, ω_2 peuvent être remplacées par des combinaisons linéaires telles que

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2,$$
$$\lambda'\omega_1 + \mu'\omega_2$$

de façon que les valeurs finales de nos intégrales seront liées aux valeurs initiales par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants. Supposons ensuite que le point $\frac{1}{x}$ vienne à traverser l'axe réel, par exemple la ligne 0 —— 1; l'intégrale $\int_0^1 \omega_1\, dv$ conserve un sens, puisque ω_1 est

holomorphe pour $v = \frac{1}{x}$. Quant à l'intégrale $\int_0^1 \omega_2\, dv$, on la remplacera par la somme des deux intégrales prise en signe contraire

$$\int_{-\infty}^{0} \omega_2\, dv, \quad \int_{1}^{+\infty} \omega_2\, dv,$$

dont chacune conserve un sens, et l'on voit que la continuation analytique de la fonction est représentée par une combinaison linéaire des mêmes intégrales. On opérerait de la même manière, si le point $\frac{1}{x}$ traversait la coupure $-\infty$ —— 0, ou la coupure 1 —— $+\infty$.

En définitive, les fonctions représentées par ces six intégrales définies doivent vérifier une même équation linéaire du troisième ordre à coefficients uniformes, admettant comme points critiques à distance finie les points $x = 0$, $x = 1$. Soit ω une fonction de x et de v, de la forme $C\omega_1 + C'\omega_2$, où C et C' sont des constantes indépendantes de x et de v; toutes les intégrales telles que

$$\int_{-\infty}^{0} \omega dv, \quad \int_{0}^{1} \omega dv, \quad \int_{1}^{+\infty} \omega dv,$$

appartiendront à la même équation. On connaît six fonctions ω qui s'expriment par une intégrale simple; cela nous fera *dix-huit* intégrales doubles vérifiant la même équation. Elles sont toutes comprises dans la formule

$$(3) \qquad y = \int_{g'}^{h'} dv \int_{g}^{h} f(x,\ u,\ v)\, du,$$

g et h désignant l'une des quantités 0, 1, $\frac{1}{vx}$, ∞, g' et h' l'une des quantités 0, 1, ∞.

A ces dix-huit intégrales on peut en joindre trois autres de la manière suivante. Entourons le point $\frac{1}{x}$ d'un cercle de rayon infiniment petit et considérons les trois contours *abn'clc'm'a*, *L'b'n'cdNM''L'*, *La'm'c'd'N'M'L*. La fonction ω_2 de v est holomorphe à l'intérieur de ces trois contours. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy à chacun d'eux et, en

remarquant qu'aux deux bords dN, $d'N'$ infiniment voisins de la coupure $\frac{1}{x}$ —— ∞, ω_2 prend des valeurs dont le rapport est un nombre K différent de l'unité, on obtient les relations suivantes:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \omega_2 dv + \int_{-\infty}^{0} \omega_2 dv + \int_{0}^{\frac{1}{x}} \omega_2 dv = 0,$$

$$\int_{0}^{1} \omega_2 dv + \int_{1}^{\frac{1}{x}} \omega_2 dv + \int_{\frac{1}{x}}^{0} \omega_2 dv = 0,$$

$$\int_{1}^{x} \omega_2 dv + \int_{\frac{1}{x}}^{1} \omega_2 dv + K \int_{\infty}^{\frac{1}{x}} \omega_2 dv = 0,$$

qui, ajoutées membre à membre, donnent

$$(1-K)\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \omega_2 dv + \int_{-\infty}^{0} \omega_2 dv + \int_{0}^{1} \omega_2 dv + \int_{1}^{+\infty} \omega_2 dv = 0$$

De cette dernière on tire

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \omega_2 dv,$$

et, en portant dans les précédentes sa valeur, on en déduit successivement

$$\int_{0}^{\frac{1}{x}} \omega_2 dv, \quad \int_{1}^{\frac{1}{x}} \omega_2 dv$$

On voit que ces trois nouvelles fonctions s'expriment linéairement au moyen des premières et, par suite, qu'elles vérifient la même équation. La fonction ω_2 est représentée par l'intégrale simple

$$\omega_2 = \int_{1}^{\frac{1}{vx}} f(x, u, v)\, du;$$

on aura donc trois nouvelles intégrales doubles comprises dans la formule

$$(4) \qquad y = \int_g^{\frac{1}{x}} dv \int_1^{\frac{1}{vx}} f(x,\ u,\ v)\, du,$$

g désignant l'une des quantités 0, 1, ∞.

Je considère maintenant en particulier l'intégrale double

$$y = \int_0^1 \int_0^1 u^{a_1-1} v^{a_2-1} (1-u)^{b_1-a_1-1} (1-v)^{b_2-a_2-1} (1-xuv)^{-a_3}\, du dv;$$

si on la développe en série, on trouve

$$y = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1-a_1)\Gamma(b_2-a_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} F(a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ x),$$

où l'on a posé

$$F(a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_1 . m)(a_2 . m)(a_3 . m)}{(1 . m)(b_1 . m)(b_2 . m)} x^m.$$

le symbole $(\lambda . m)$ désignant le produit $\lambda(\lambda+1) \ldots . (\lambda+m-1)$. Cette intégrale représente, comme on voit, une série hypergéométrique d'ordre supérieur, [1] et cette série satisfait, comme il est facile de s'en assurer, à l'équation différentielle du 3ème ordre

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} x^2(x-1)\dfrac{d^3y}{dx^3} + [(3+a_1+a_2+a_3)x-(1+b_1+b_2)]\, x\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ + \{(1+a_1+a_2+a_3+a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)x-b_1b_2\}\dfrac{dy}{dx} + a_1a_2a_3y = 0 \end{array} \right.$$

D'ailleurs, si l'on suppose les quantités a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 absolument quelconques, cette équation est irréductible, comme il est facile de le montrer en s'appuyant sur la forme des intégrales dans le voisinage des valeurs 0, 1, ∞. Il en résulte que l'équation (5) est vérifiée par chacune des intégrales doubles (3) et (4); et la proposition, démontrée en supposant

(1) Thomæ. Mathematische Annalen, II Band, et Journal de Crelle, tome 87.

que toutes ces intégrales aient un sens, s'étend d'elle-même au cas où certaines d'entre elles cesseraient d'avoir un sens.

A cause de la symétrie de $f(x, u, v)$ en u et v, l'équation (5) sera aussi vérifiée par chacune des intégrales doubles

$$y = \int_{g'}^{h'} du \int_{g}^{h} f(x, u, v)\, dv, \tag{3'}$$

où l'on prend pour g et h l'une des quantités $0, 1, \frac{1}{ux}, \infty$ et pour g' et h' l'une des quantités $0, 1, \infty$. Elle est aussi vérifiée par chacune des intégrales doubles

$$y = \int_{g}^{\frac{1}{x}} du \int_{1}^{\frac{1}{ux}} f(x, u, v)\, dv, \tag{4'}$$

où g désigne l'une des quantités $0, 1, \infty$.

Prenons en particulier l'intégrale double

$$y = \int_0^1 dv \int_{\frac{1}{xv}}^{\infty} f(x, u, v)\, du;$$

posons-y: $u = \frac{1}{xvt}$, elle devient:

$$y = x^{1-b_1} \int_0^1 \int_0^1 t^{a_3-b_1} v^{a_2-b_1} (1-t)^{-a_3} (1-v)^{b_2-a_2-1} (1-xvt)^{-(a_1+1-b_1)}\, dt$$

La nouvelle intégrale est de la même forme que la première; l'équation (5) admet donc la solution

$$y = x^{1-b_1} F(a_1+1-b_1,\ a_2+1-b_1,\ a_3+1-b_1,\ b_2+1-b_1,\ 2-b_1,\ x)$$

Par raison de symétrie, elle admet aussi la solution

$$y = x^{1-b_2} F(a_1+1-b_2,\ a_2+1-b_2,\ a_3+1-b_2,\ 2-b_2,\ b_1+1-b_2,\ x),$$

qui est représentée par l'intégrale double

$$y = \int_0^1 du \int_{\frac{1}{xu}}^{\infty} f(x, u, v)\, dv$$

Prenons encore l'intégrale double

$$y = \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} f(x, u, v)\, du dv;$$

en posant $u = \frac{1}{t}$, $v = \frac{1}{w}$, elle devient

$$y = x^{-a_3} \int_0^1 \int_0^1 t^{a_3 - b_1} w^{a_3 - b_2} (1 - t)^{b_1 - a_1 - 1} (1 - w)^{b_2 - a_2 - 1} \left(1 - \frac{tw}{x}\right)^{-a_3} dt dw$$

L'équation (5) admet donc l'intégrale

$$y = x^{-a_3} F\left(a_3 + 1 - b_1,\ a_3 + 1 - b_2,\ a_3,\ a_3 + 1 - a_1,\ a_3 + 1 - a_2,\ \frac{1}{x}\right)$$

Par raison de symétrie, elle admet aussi les deux intégrales

$$y = x^{-a_1} F\left(a_1,\ a_1 + 1 - b_1,\ a_1 + 1 - b_2;\ a_1 + 1 - a_2,\ a_1 + 1 - a_3,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$y = x^{-a_2} F\left(a_2 + 1 - b_1,\ a_2,\ a_2 + 1 - b_2,\ a_2 + 1 - a_1,\ a_2 + 1 - a_3,\ \frac{1}{x}\right)$$

Ces dernières sont d'ailleurs représentées par les intégrales doubles

$$\int_1^{\infty} dv \int_0^{\frac{1}{xv}} f(x, u, v)\, du, \qquad \int_1^{\infty} du \int_1^{\frac{1}{xu}} f(x, u, v)\, dv.$$

(28). Soit

$$\varphi(x, y, u, v) = u^{\beta - 1} v^{\beta' - 1} (1 - u)^{\gamma - \beta - 1} (1 - v)^{\gamma' - \beta' - 1} (1 - ux - vy)^{-\alpha}$$

Chacune des intégrales simples

$$\omega = \int_g^h \varphi(x, y, u, v)\, du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, $\frac{1 - vy}{x}$, ∞, pourvu qu'elle ait un sens, considerée comme fonction de v, satisfait à une équation

linéaire du second ordre à coefficients rationnels, ayant pour points critiques à distance finie les points

$$0,\ 1,\ \frac{1}{y},\ \frac{1-x}{y}.$$

Je suppose, pour fixer les idées, que les parties réelles des quantités β, $\gamma-\beta$, $1-\alpha$, $\alpha+1-\gamma$ sont positives, de façon que toutes ces intégrales aient un sens. On a par exemple

$$\int_0^1 \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\,du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\, v^{\beta'-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-vy)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{1-vy}\right),$$

F désignant la série hypergéométrique de GAUSS. Ces diverses intégrales sont des branches d'une même fonction multiforme jouissant des propriétés nécessaires pour qu'on puisse leur appliquer le théorème III. Regardons pour un moment x et y comme fixes, et soit $\Psi(\omega)=0$ l'équation différentielle dont il vient d'être question. Imaginons un système de coupures formé par les droites $-\infty$ —— 0, 1 —— $+\infty$, et par des lignes droites indéfinies partant des points $\frac{1}{y}$ et $\frac{1-x}{y}$. Si le chemin suivi par la variable v est assujetti à ne rencontrer aucune de ces lignes, toutes les intégrales de l'équation $\Psi(\omega)=0$ sont des fonctions uniformes de v dans toute l'étendue du plan. Les exposants de discontinuité relatifs aux points critiques ont respectivement les valeurs suivantes:

pour $v=0$ . . . . $\beta'-1$, β',

pour $v=1$ . . . . $\gamma'-\beta'-1$, $\gamma'-\beta'$,

pour $v=\frac{1}{y}$ . . . . 0, $\beta-\alpha$,

pour $v=\frac{1-x}{y}$ . . . . 0, $\gamma-\alpha-\beta$,

pour $v=\infty$ . . . . . . $\alpha+2-\gamma'$, $\alpha+3-\gamma-\gamma'$;

supposons que les parties réelles des quantités β', $\gamma'-\beta'$, $\beta+1-\alpha$, $\gamma+1-\alpha-\beta$, $\alpha+1-\gamma'$, $\alpha+2-\gamma-\gamma'$, soient positives, conditions compatibles avec les précédentes, comme il est aisé de s'en assurer. Toutes

les intégrales $\int \omega dv$, prises entre deux des limites $0,\ 1,\ \frac{1}{y}\ \frac{1-x}{y},\ \infty$ auront alors un sens.

Une des branches de la fonction ω est holomorphe pour $v = \frac{1}{y}$; elle est représentée par l'intégrale définie

$$\omega_1 = \int_1^{+\infty} \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du$$

On a, en effet, à un facteur constant près

$$\omega_1 = v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1}\, x^{-\alpha}\, F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1-vy}{x}\right)$$

De même une branche ω_2 est holomorphe pour $v = \frac{1-x}{y}$;

$$\omega_2 = \int_{\infty}^{0} \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du;$$

car on a à un facteur constant près,

$$\omega_2 = v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-vy)^{-\alpha}\, F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{1-x-vy}{1-vy}\right)$$

Nous considérerons en outre les deux branches ω_3 et ω_4 qui sont représentées par les intégrales définies suivantes

$$\omega_3 = \int_0^{\frac{1-vy}{x}} \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du,$$

$$\omega_4 = \int_1^{\frac{1-vy}{x}} \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du$$

Ces nouvelles branches se comportent d'une manière simple dans le voisinage des valeurs $\frac{1}{y},\ \frac{1-x}{y}$, attribuées à la variable v. On a, en effet, en faisant abstraction d'un facteur constant.

$$\omega_3 = v^{\beta'-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1} x^{-\beta}(1-vy)^{\beta-\alpha} F\left(\beta+1-\gamma,\ \beta,\ \beta+1-\alpha,\ \frac{1-vy}{x}\right),$$

$$\omega_4 = v^{\beta'-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-vy)^{\beta-\gamma}(1-x-vy)^{\gamma-\beta-\alpha} F\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{1-x-vy}{1-vy}\right).$$

Lorsque la variable v tourne autour du point $\frac{1}{y}$, ω_3 se reproduit multipliée par le facteur $e^{\pm 2\pi i(\beta-\alpha)}$ et lorsque v tourne autour du point $\frac{1-x}{y}$, ω_4 est multipliée par $e^{\pm 2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}$.

Les deux points $\frac{1}{y}$, $\frac{1-x}{y}$ peuvent être situés tous les deux dans la partie supérieure ou dans la partie inférieure du plan, ou bien l'un dans la partie supérieure et l'autre dans la partie inférieure du plan.

Je suppose d'abord qu'ils soient tous les deux dans la même partie du plan, par exemple dans la partie inférieure (fig. 13).

Les deux fonctions ω_1, ω_2 sont holomorphes à l'intérieur du contour $ama'LML'b'nba$, et le théorème de Cauchy, appliqué à ce contour, donne les deux relations:

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{0}\omega_1 dv + \int_{0}^{1}\omega_1 dv + \int_{1}^{+\infty}\omega_1 dv = 0, \\ \int_{-\infty}^{0}\omega_2 dv + \int_{0}^{1}\omega_2 dv + \int_{1}^{+\infty}\omega_2 dv = 0. \end{array}\right.$$

Si les points $\frac{1}{y}$, $\frac{1-x}{y}$ sont disposés autrement, comme dans la figure (14), ω_1 est holomorphe à l'intérieur du contour $ama'LML'b'nba$, et on a encore:

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{0}\omega_1 dv + \int_{0}^{1}\omega_1 dv + \int_{1}^{+\infty}\omega_1 dv = 0.$$

De même la fonction ω_2, qui est holomorphe dans le voisinage du point $\frac{1-x}{y}$, est holomorphe à l'intérieur du contour $am'a'LM'L'b'n'ba$, mais aux points a' et b' elle est représentée par $C\omega_1 + C'\omega_2$, $C_1\omega_1 + C'_1\omega_2$,

C, C'', C_1, C''_1 étant des constantes, et l'application du théorème de Cauchy donne une nouvelle relation:

$$(8)\qquad C\int_{-\infty}^{0}\omega_1 dv + C'\int_{-\infty}^{0}\omega_2 dv + \int_{0}^{1}\omega_2 dv + C_1\int_{1}^{+\infty}\omega_1 dv + C'_1\int_{1}^{+\infty}\omega_2 dv = 0$$

En définitive les six intégrales définies

$$\int_{-\infty}^{0}\omega_1 dv,\quad \int_{0}^{1}\omega_1 dv,\quad \int_{1}^{+\infty}\omega_1 dv,$$

$$\int_{-\infty}^{0}\omega_2 dv,\quad \int_{0}^{1}\omega_2 dv,\quad \int_{1}^{+\infty}\omega_2 dv,$$

peuvent s'exprimer linéairement au moyen de quatre d'entre elles; les autres cas de figure se traiteraient comme les précédents. Les variables x, y, suivant des chemins quelconques, on reconnaît que la continuation analytique de l'une quelconque des fonctions représentées par ces six intégrales définies peut toujours s'exprimer par une combinaison linéaire des mêmes intégrales. Ces fonctions vérifient donc un système d'équations linéaires aux dérivées partielles de la forme suivante:

$$(9)\qquad \begin{cases} r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \\ t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z, \end{cases}$$

les a et les b étant des fonctions uniformes de x et de y et p, q, r, s, t désignant, suivant l'usage, les dérivées partielles,

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Il en sera de même de toute intégrale de la forme

$$z = \int (C\omega_1 + C'\omega_2)\, dv,$$

prise entre deux des limites 0, 1, ∞, où C et C' désignent des constantes par rapport à x, y, v. Il existe six fonctions de la forme $C\omega_1 + C'\omega_2$ qui s'expriment par une intégrale simple; cela fait en tout dix-huit

intégrales doubles qui vérifient les équations (9). Elles sont toutes comprises dans la formule

$$(10) \qquad z = \int_{g'}^{h'} dv \int_{g}^{h} \varphi(x, y, u, v)\, du,$$

g et h désignant deux des quantités $0, 1, \frac{1-vy}{x}, \infty$ et g', h' deux des quantités $0, 1, \infty$. A ces dix-huit intégrales on peut ajouter les six autres données par les deux formules

$$(11) \qquad \left| \begin{aligned} z &= \int_{g}^{\frac{1}{y}} dv \int_{0}^{\frac{1-vy}{x}} \varphi(x, y, u, v)\, du, \\ z &= \int_{g}^{\frac{1-x}{y}} dv \int_{1}^{\frac{1-vy}{x}} \varphi(x, y, u, v)\, du, \end{aligned} \right.$$

où l'on donne à g une des valeurs $0, 1, \infty$. On démontre en effet, en opérant comme dans le premier exemple, que ces nouvelles intégrales s'expriment linéairement au moyen des premières.

Je prends maintenant en particulier l'intégrale double

$$z = \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha} du dv,$$

qui a été étudiée par Mr Appell (loc. cit. page 196). En la développant en série, on trouve sans peine

$$z = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')} F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y),$$

$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$ désignant la série hypergéométrique de deux variables

$$\sum \frac{(\alpha\,.\,m+n)(\beta\,.\,m)(\beta'\,.\,n)}{(\gamma\,.\,m)(\gamma'\,.\,n)(1\,.\,m)(1\,.\,n)} x^m y^n,$$

la sommation s'étendant aux valeurs entières de m et de n de zéro à

l'infini. Cette fonction vérifie, comme on sait, le système des deux équations

$$(12)\qquad \begin{cases} x(1-x)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' xp - \alpha\beta' z = 0. \end{cases}$$

Admettons que ce système est irréductible; ce qu'on peut du reste démontrer en toute rigueur. Il résulte de ce qui précède que les équations (12) seront vérifiées par chacune des intégrales doubles (10) et (11).

A cause de la forme de l'expression $\varphi(x, y, u, v)$, elles seront aussi vérifiées par chacune des intégrales doubles

$$(10)' \qquad z = \int_{g'}^{h'} du \int_g^h \varphi(x, y, u, v)\, dv,$$

où l'on prend pour g et h deux des quantités 0, 1, $\frac{1-ux}{y}$, ∞ et pour g' et h' deux des quantités 0, 1, ∞. Il en sera de même de chacune des intégrales doubles

$$(11)' \qquad \begin{cases} z = \displaystyle\int_g^{\frac{1}{x}} du \int_0^{\frac{1-ux}{y}} \varphi(x, y, u, v)\, dv, \\ z = \displaystyle\int_g^{\frac{1-y}{x}} du \int_1^{\frac{1-ux}{y}} \varphi(x, y, u, v)\, dv, \end{cases}$$

où g a l'une des valeurs 0, 1, ∞.

Parmi ces diverses intégrales, je considère en particulier la suivante:

$$z = \int_0^1 dv \int_{\frac{1-vy}{x}}^{\infty} \varphi(x, y, u, v)\, du;$$

si l'on y pose $u = \frac{1-vy}{xt}$, elle devient

$$z = x^{1-\gamma} \int_0^1 \int_0^1 t^{\alpha-\gamma} (1-t)^{-\alpha} v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-vy)^{\beta-\alpha} (1-tx-vy)^{\gamma-\beta-1}\, dv dt.$$

Développons la nouvelle intégrale double suivant les puissances croissantes de x; le coefficient de x^m sera

$$\frac{(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)\dots(\beta+m-\gamma)}{1.2\dots m}\int_0^1\int_0^1 t^{\alpha-\gamma+m}(1-t)^{-\alpha}v^{\beta'-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-vy)^{-(\alpha+m+1-\gamma)}\,dt\,dv,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(\beta+1-\gamma)\dots(\beta+m-\gamma)}{1.2\dots m}\,\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+m+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(m+2-\gamma)}F(\alpha+m+1-\gamma,\beta',\gamma',y)$$

On obtient pour l'intégrale considérée le développement qui suit

$$z=x^{1-\gamma}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\beta+1-\gamma.m)(\alpha+1-\gamma.m)}{(1.m)(2-\gamma.m)}F(\alpha+m+1-\gamma,\beta',\gamma',y)x^m;$$

ou bien

$$z=\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)}x^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ \beta',\ 2-\gamma,\ \gamma',\ x,\ y)$$

Les équations (12) admettent donc l'intégrale commune

$$x^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ \beta',\ 2-\gamma,\ \gamma',\ x,\ y).$$

Par raison de symétrie, elles admettront aussi l'intégrale commune

$$y^{1-\gamma'}F_2(\alpha+1-\gamma',\ \beta,\ \beta'+1-\gamma',\ \gamma,\ 2-\gamma',\ x,\ y),$$

qui serait représentée par l'intégrale double

$$\int_0^1 du\int_{\frac{1-ux}{y}}^{\infty}\varphi(x,\ y,\ u,\ v)\,dv.$$

Si l'on fait attention à la manière dont la seconde intégrale commune se déduit de la première, on déduira de la troisième une nouvelle intégrale commune de même forme

$$x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}F_2(\alpha+2-\gamma-\gamma',\ \beta+1-\gamma,\ \beta'+1-\gamma',\ 2-\gamma,\ 2-\gamma',\ x,\ y).$$

Prenons encore l'intégrale double

$$z=\int^{\frac{1}{y}}dv\int^{\frac{1-vy}{x}}\varphi(x,\ y,\ u,\ v)\,du;$$

si l'on y pose d'abord $v = \frac{1}{y} t$, puis $u = \frac{w}{x}$, elle devient

$$z = x^{-\beta} y^{-\beta'} \int_0^1 dt \int_0^{1-t} w^{\beta-1} t^{\beta'-1} \left(1 - \frac{w}{x}\right)^{\gamma-\beta-1} \left(1 - \frac{t}{y}\right)^{\gamma'-\beta'-1} (1 - w - t)^{-\alpha} dw,$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta+\beta'+1-\alpha)} x^{-\beta} y^{-\beta'} F_3\left(\beta, \beta', \beta+1-\gamma, \beta'+1-\gamma', \beta+\beta'+1-\alpha, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Les résultats qui précèdent ont été trouvés directement par Mr Appell; mais la méthode suivie montre bien clairement le lien analytique qui existe entre ces différentes intégrales doubles, au premier abord d'un aspect si différent.

Les autres intégrales doubles conservent un sens tant que x et y restent compris entre certaines limites, variables d'une intégrale à l'autre. Dans ces limites, elles représentent des fonctions des deux variables indépendantes x et y, qui vérifient les équations (12). Mais si on les développe en séries, le coefficient du terme général ne paraît pas susceptible d'une forme simple, comme dans les exemples déjà examinés.

Toulouse, Décembre 1882.

Fig. 1

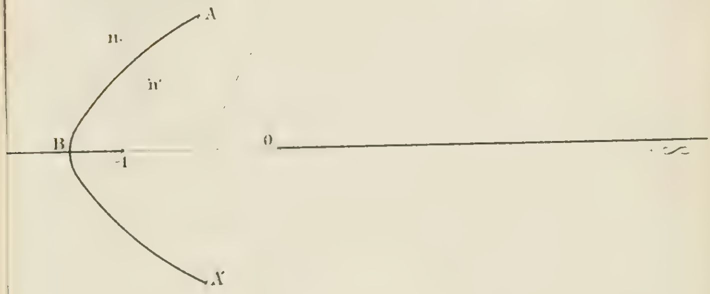
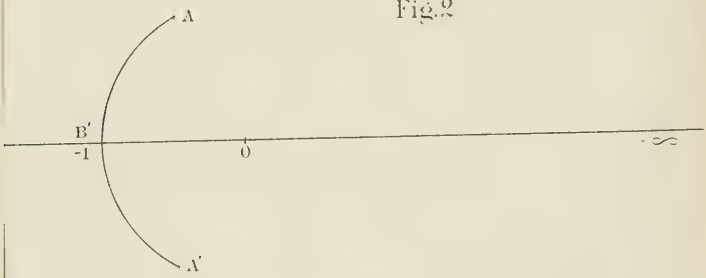


Fig. 2



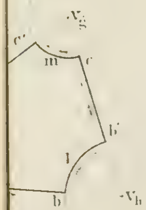


Fig. 4

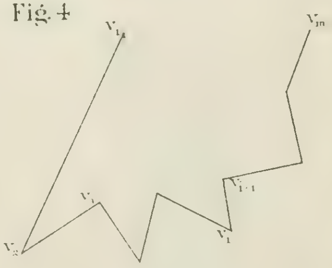


Fig. 1

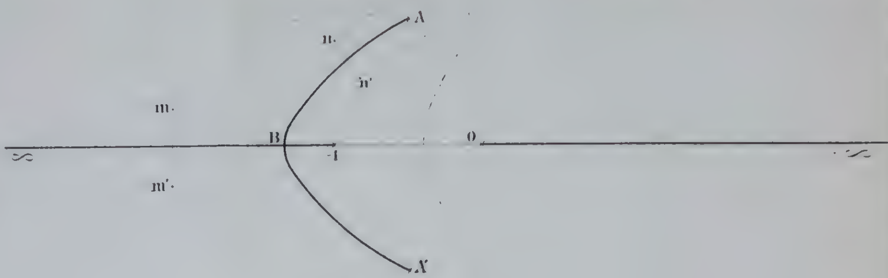


Fig. 2

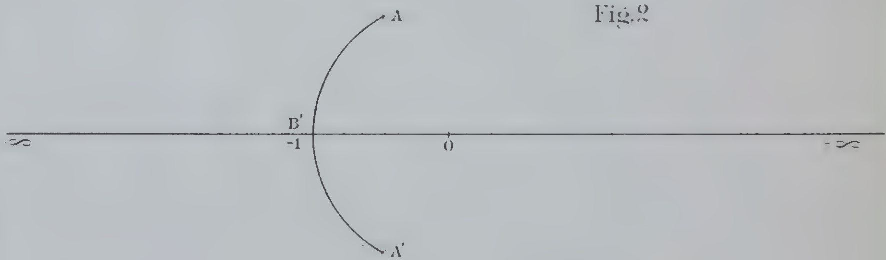


Fig. 3

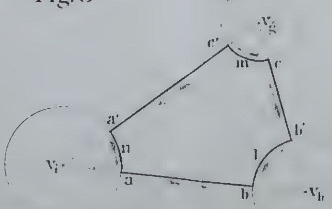


Fig. 4

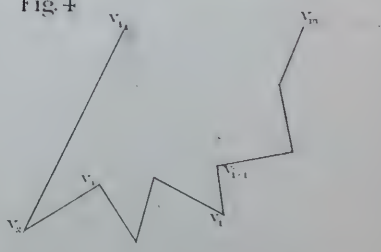


Fig. 5



Fig. 6

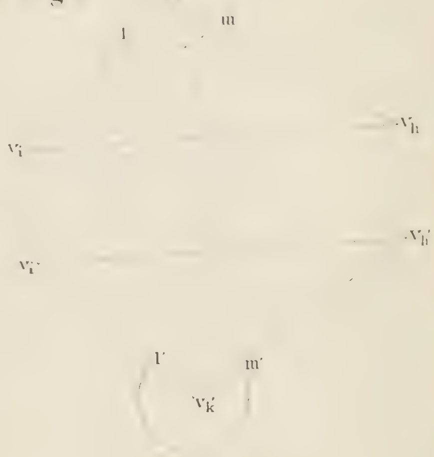


Fig. 7

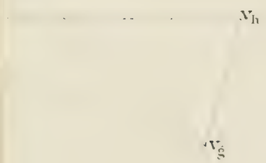


Fig. 8



Fig. 5

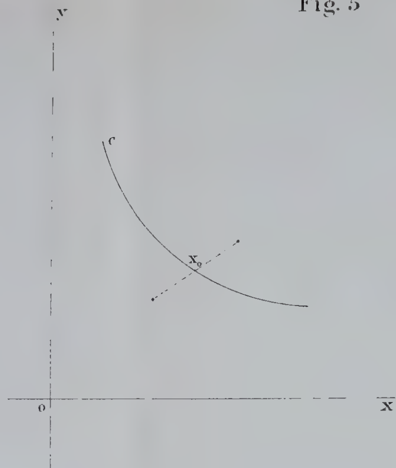


Fig. 6

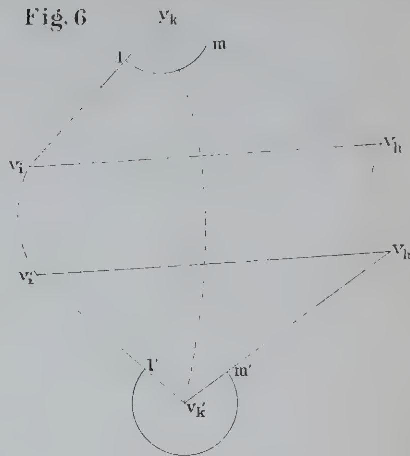


Fig. 7

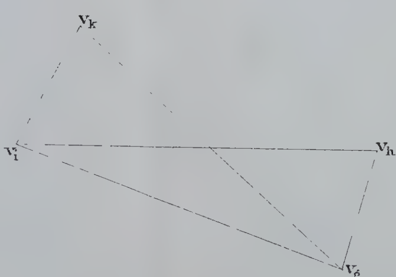
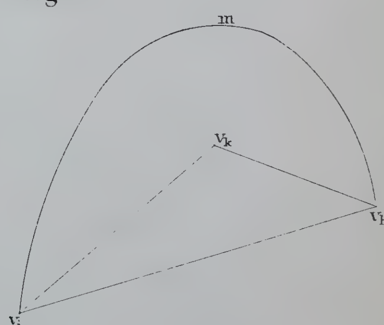


Fig. 8



Centr. Tryck. Stockh. 1882

Fig. 9

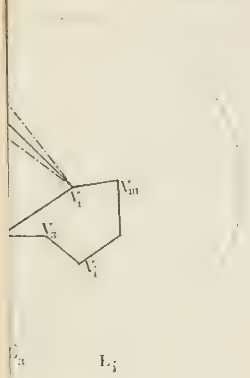
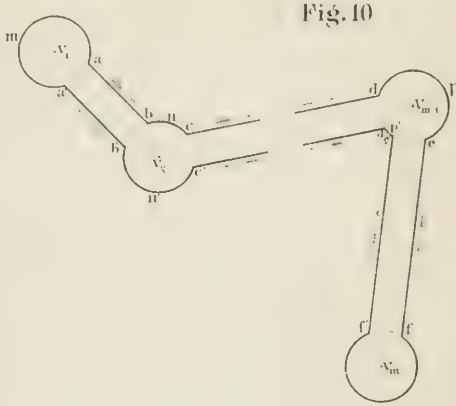


Fig. 10



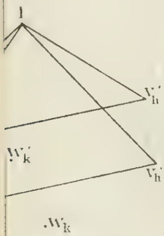


Fig. 11

Fig. 12

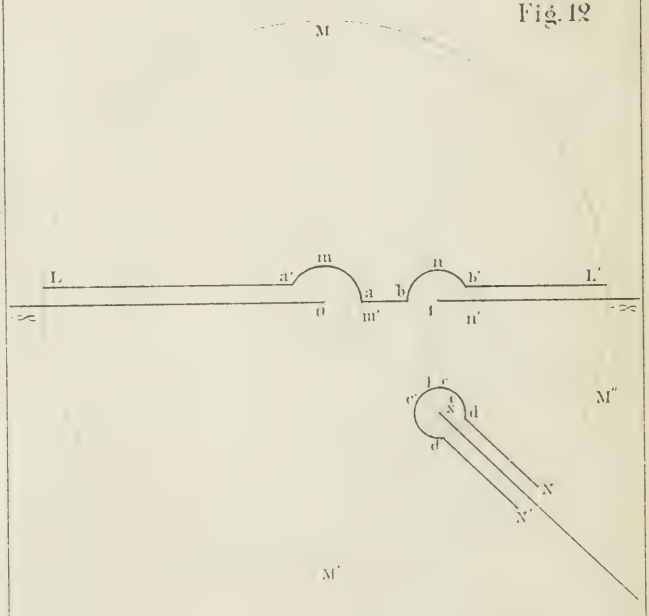


Fig. 9

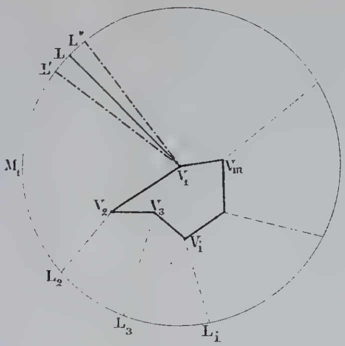
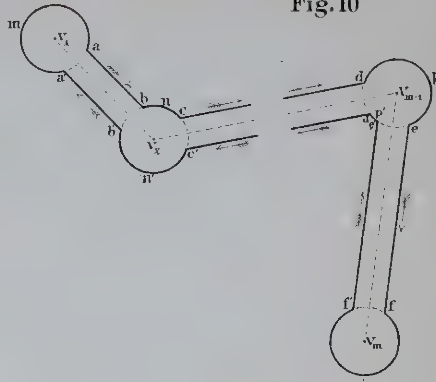


Fig. 10



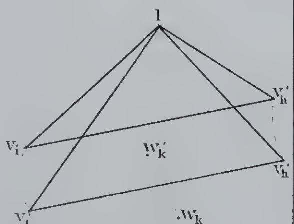


Fig. 11

Fig. 12

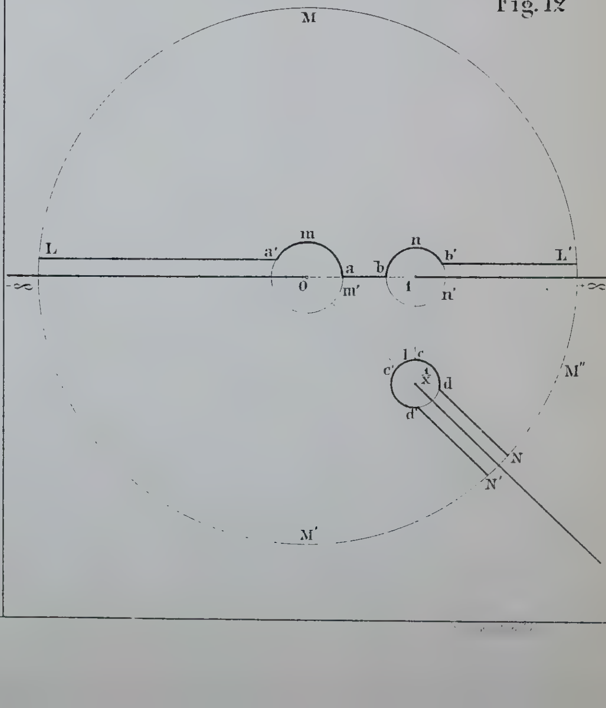


Planche IV.

Fig. 13

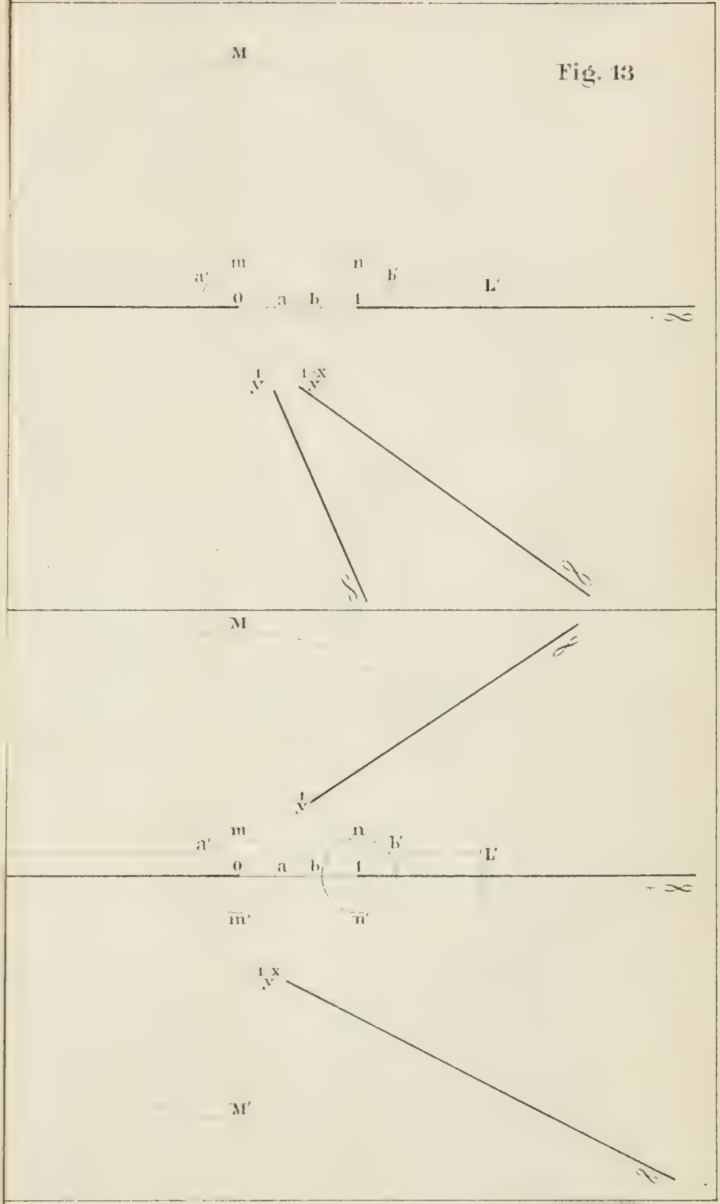


Fig. 13

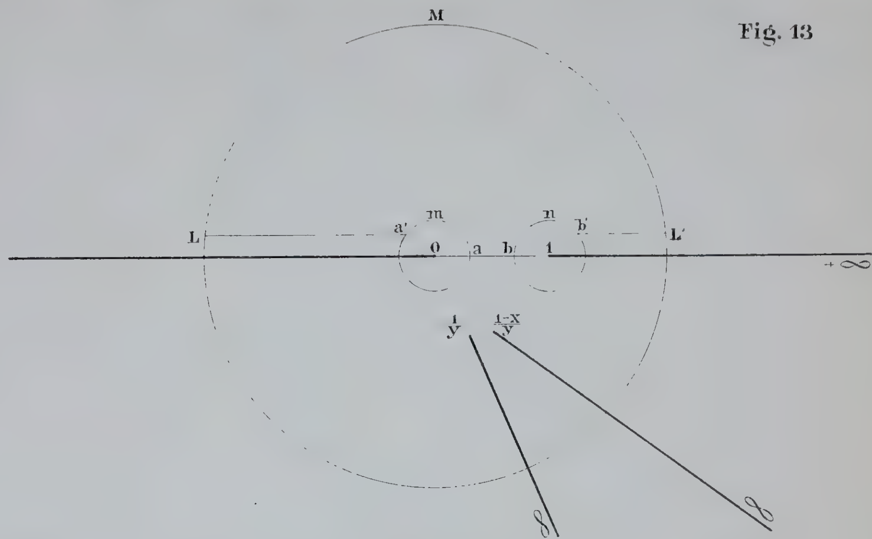
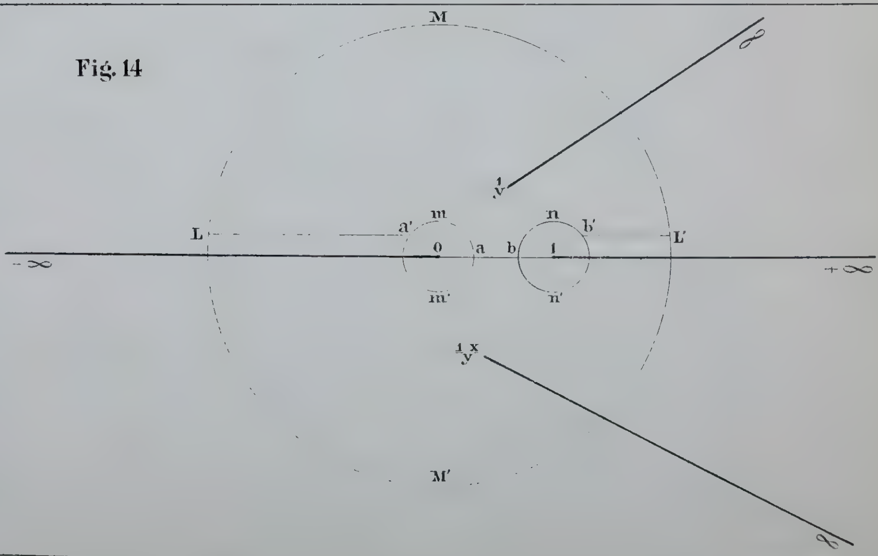

M
m
n
a'
b'
L
L'
0
a
b
1
+∞
$\frac{1}{y}$
$\frac{1-x}{y}$
∞
∞

Fig. 14


M
∞
$\frac{1}{y}$
m
n
a'
b'
L
L'
0
a
b
1
-∞
+∞
m'
n'
$\frac{1}{y}x$
M'
∞

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES

PAR

P. APPELL
À PARIS.

Je me propose, dans ce travail, d'étendre à une classe particulière de fonctions de deux variables *indépendantes* x et y les théorèmes de MM. WEIERSTRASS et MITTAG-LEFFLER sur les fonctions d'une variable. J'applique ensuite les théorèmes généraux ainsi obtenus à la formation de certaines fonctions simplement périodiques de deux variables.

J'emploie le mot de *point* pour désigner un système de valeurs attribuées aux deux variables x et y; ainsi je dis qu'une fonction de x et y s'annule au point (x_1, y_1) si elle s'annule pour $x = x_1$, $y = y_1$; etc. . . . .

Nous renvoyons pour la classification des points singuliers des fonctions de deux variables indépendantes au Mémoire de M. WEIERSTRASS: »*Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*».

1. Soient

$$(1) \qquad f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots f_\nu(x, y), \ldots$$

une suite de fonctions analytiques uniformes des deux variables *indépendantes* x et y possédant la propriété suivante: pour toutes les valeurs de ν supérieures à un entier positif μ, l'on peut assigner un nombre positif a_ν tel que la fonction $f_\nu(x, y)$ reste holomorphe tant que les modules de x et y restent inférieurs à a_ν; de plus ce nombre a_ν augmente indéfiniment avec ν. L'on peut alors former une fonction uniforme $F(x, y)$ des vari-

ables indépendantes x et y n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que ceux des fonctions (1) et telle que la différence

$$F(x, y) - f_\nu(x, y)$$

soit régulière en tous les points singuliers de $f_\nu(x, y)$ à l'exception de ceux de ces points singuliers qui peuvent appartenir à certaines autres des fonctions (1).

Pour démontrer ce théorème il suffit d'employer la démonstration indiquée par M. WEIERSTRASS pour le théorème de M. MITTAG-LEFFLER. C'est ce que je vais montrer rapidement. Désignons par ε un nombre positif moindre que l'unité et par

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_\nu, \ldots$$

des nombres positifs dont la somme est finie. Formons d'abord la somme des fonctions $f_\nu(x, y)$ dans lesquels $\nu \leqq \mu$;

$$F_1(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} f_\nu(x, y). \tag{2}$$

Considérons maintenant les fonctions $f_\nu(x, y)$ dans lesquelles $\nu > \mu$; pour les valeurs de x et y telles que

$$\operatorname{mod} x \leqq \varepsilon a_\nu, \quad \operatorname{mod} y \leqq \varepsilon a_\nu \tag{3}$$

la fonction $f_\nu(x, y)$ est développable en une série convergente de la forme

$$f_\nu(x, y) = \sum_{m=0,\ n=0}^{m=\infty,\ n=\infty} A^{(\nu)}_{m,\,n} x^m y^n,$$

et l'on peut assigner un entier positif p_ν tel que, pour toutes les valeurs de x et y satisfaisant aux conditions (3), l'on ait

$$\text{mod.} \sum_{m=p_\nu,\ n=p_\nu}^{m=\infty,\ n=\infty} A^{(\nu)}_{m,\,n} x^m y^n \leqq \varepsilon_\nu;$$

si donc l'on désigne par $\varphi_\nu(x, y)$ le polynôme

$$\varphi_\nu(x, y) = \sum_{m=0,\ n=0}^{m=p_\nu-1,\ n=p_\nu-1} A^{(\nu)}_{m,\,n} x^m y^n,$$

la série

$$(4) \qquad F_2(x, y) = \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} [f_\nu(x, y) - \varphi_\nu(x, y)]$$

est convergente en tous les points qui ne sont pas des points singuliers des fonctions $f_\nu(x, y)$. La fonction

$$F(x, y) = F_1(x, y) + F_2(x, y)$$

possède les propriétés indiquées dans l'énoncé. La fonction la plus générale possédant ces propriétés est $F(x, y) + G(x, y)$, $G(x, y)$ étant une fonction entière de x et y.

2. L'on conclut de ce qui précède le théorème suivant:

Soient

$$(5) \qquad g_1(x, y), \; g_2(x, y), \; \ldots \; g_\nu(x, y), \; \ldots$$

une suite de fonctions entières de x et y possédant la propriété suivante: pour toutes les valeurs de ν supérieures à un entier positif μ, l'on peut assigner un nombre positif a_ν tel que la fonction $g_\nu(x, y)$ ne s'annule pour aucun système de valeurs de x et y dont les modules restent inférieurs à a_ν; de plus ce nombre a_ν augmente indéfiniment avec ν. Alors, en désignant par

$$k_1, \; k_2, \; \ldots \; k_\nu, \; \ldots$$

une suite d'entiers positifs, l'on peut former une fonction entière $G(x, y)$ de x et y s'annulant pour toutes les valeurs de x et y qui annulent la fonction $g_\nu(x, y)$ de telle façon que le quotient

$$\frac{G(x, y)}{[g_\nu(x, y)]^{k_\nu}}$$

reste fini et différent de zéro pour toutes ces valeurs, sauf pour celles d'entre elles qui annulent en même temps certaines autres des fonctions entières (5).

Cette fonction $G(x, y)$ est donnée par la formule

$$G(x, y) = G_1(x, y) \, . \, G_2(x, y)$$

avec

$$G_1(x, y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu}[g_\nu(x, y)]^{k_\nu}$$

et

$$G_2(x, y) = \prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=\infty}[g_\nu(x, y)]^{k_\nu} e^{\gamma_\nu(x, y)}$$

où $\gamma_\nu(x, y)$ désigne un polynôme convenablement déterminé.

Pour démontrer ces propositions, il suffit d'appliquer le théorème du § 1 à la fonction

$$\frac{\partial \log G(x, y)}{\partial x}$$

en prenant

$$f_\nu(x, y) = k_\nu \frac{\partial \log g_\nu(x, y)}{\partial x}.$$

3. Pour appliquer le théorème du § 1 à un exemple, prenons

$$f_\nu(x, y) = \frac{1}{[(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2]^s} \tag{6}$$

s étant un entier positif, et les différentes fonctions f_ν étant obtenues en donnant à m et à n toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Cette fonction satisfait bien aux conditions imposées à $f_\nu(x, y)$. En effet soit c un nombre positif quelconque; mettons à part les fonctions (6) en nombre fini correspondant à des valeurs de m et n pour lesquelles la quantité

$$\sqrt{m^2 + n^2} - \text{mod.}\, a - c \tag{7}$$

est négative ou nulle. Les fonctions (6) correspondant à toutes les autres valeurs de m et n sont holomorphes pour toutes les valeurs de x et y dont les modules sont moindres que le nombre positif

$$a_\nu = \frac{1}{2}\left[\sqrt{m^2 + n^2} - \text{mod.}\, a - c\right]; \tag{8}$$

l'on voit de plus que a_ν croît indéfiniment avec ν. En effet, si les modules de x et y sont moindres que la quantité positive (8) on a

$$\text{mod.}\,(x + yi + m + ni) > \text{mod.}\,(m + ni) - \text{mod.}\,(x + yi)$$

$$\text{mod.}\,(x - yi + m - ni) > \text{mod.}\,(m - ni) - \text{mod.}\,(x - yi)$$

et comme

$$\text{mod.}\,(x + yi) < \text{mod.}\,x + \text{mod.}\,y$$

$$\text{mod.}\,(x - yi) < \text{mod.}\,x + \text{mod.}\,y$$

et que

$$\text{mod.}\,x + \text{mod.}\,y \leq \sqrt{m^2 + n^2} - \text{mod.}\,a - c,$$

on a

$$\text{mod.}\,(x + yi + m + ni) > \text{mod.}\,a + c$$

$$\text{mod.}\,(x - yi + m - ni) > \text{mod.}\,a + c;$$

donc en multipliant membre à membre

$$\text{mod.}\,[(x + m)^2 + (y + n)^2] - \text{mod.}\,a^2 > 2c\,\text{mod.}\,a + c^2;$$

d'où enfin puisque

$$\text{mod.}\,[(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2] > \text{mod.}\,[(x + m)^2 + (y + n)^2] - \text{mod.}\,a^2,$$

$$\text{mod.}\,[(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2] > 2c\,\text{mod.}\,a + c^2$$

Donc pour toutes les valeurs de x et y dont le module est inférieur à la quantité (8) le module du dénominateur de $f_\nu(x, y)$ reste supérieur à un nombre fixe et par suite $f_\nu(x, y)$ est holomorphe pour ces valeurs.

Si l'entier s est plus grand que 1, la fonction $F(x, y)$ est facile à former; en effet dans ce cas la série

$$(9) \qquad F_s(x, y \mid a) = \sum_{m,\,n=-\infty}^{m,\,n=+\infty} \frac{1}{[(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2]^s}$$

est absolument convergente et les polynômes désignés dans la théorie générale par $\varphi_\nu(x, y)$ sont nuls identiquement. (Voir à ce sujet un Mémoire d'Eisenstein, Journal de Crelle tome 35, page 155). La fonction (9) ainsi définie est simplement périodique. On a, en effet,

$$F_s(x + 1, y \mid a) = F_s(x, y + 1 \mid a) = F_s(x, y \mid a)$$

On remarquera l'analogie de la fonction (9) avec la fonction

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{[(x+m)^2+a^2]^s}$$

qui s'exprime à l'aide des fonctions circulaires. La fonction (9) satisfait à l'identité

$$k^{2s}F_s(kx,\ ky \mid ka) = \sum_{\mu,\ \nu=0}^{\mu,\ \nu=k-1} F_s\left(x+\frac{\mu}{k},\ y+\frac{\nu}{k} \,\middle|\, a\right)$$

où k est un entier positif. Cette formule est analogue à celle de la multiplication dans les fonctions circulaires.

Lorsque l'exposant s est égal à 1, la série (9) n'est plus convergente. Alors

$$f_\nu(x,\ y) = \frac{1}{(x+m)^2+(y+n)^2+a^2}; \tag{10}$$

développons cette fonction en série en supposant que la quantité (7) soit positive et que les modules de x et y soient moindres que la quantité (8); nous avons

$$f_\nu(x,\ y) = \frac{1}{m^2+n^2+a^2} - \frac{2mx+2ny}{(m^2+n^2+a^2)^2} + \ldots$$

Dans le cas actuel il suffit de prendre

$$\varphi_\nu(x,\ y) = \frac{1}{m^2+n^2+a^2};$$

alors considérant les deux fonctions

$$F'(x,\ y) = \sum \frac{1}{(x+m)^2+(y+n)^2+a^2}$$

la somme étant étendue aux valeurs de m et n en nombre fini qui rendent la quantité (7) négative ou nulle, et

$$F''(x,\ y) = \sum \left[\frac{1}{(x+m)^2+(y+n)^2+a^2} - \frac{1}{m^2+n^2+a^2}\right]$$

cette somme étant étendue aux valeurs de m et n qui rendent la quantité (7) positive, la fonction cherchée sera

$$F(x, y) = F'(x, y) + F''(x, y).$$

4. Les résultats précédents conduisent à considérer une classe nouvelle de fonctions simplement périodiques de deux variables indépendantes. Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y; prenons

$$f_\nu(x, y) = R(x + m, y + n)$$

et supposons que cette fonction f_ν satisfasse aux conditions imposées par l'énoncé du § 1. Alors, si les polynômes désignés dans la théorie générale par $\varphi_\nu(x, y)$ sont nuls identiquement, la série

$$\sum_{m, n = -\infty}^{m, n = +\infty} R(x + m, y + n)$$

est absolument convergente et définit une fonction uniforme ayant par rapport à chacune des variables la période 1.

Si les polynômes $\varphi_\nu(x, y)$ ne sont pas nuls et si leurs degrés respectifs restent inférieurs à un nombre fixe, la fonction $F(x, y)$ correspondante satisfera à deux relations de la forme

$$F(x + 1, y) - F(x, y) = \psi(x, y)$$
$$F(x, y + 1) - F(x, y) = \omega(x, y)$$

ψ et ω désignant des polynômes en x et y satisfaisant à la relation

$$\psi(x, y + 1) - \psi(x, y) = \omega(x + 1, y) - \omega(x, y) \tag{11}$$

Soit k le degré des polynômes ψ et ω; l'on pourra former un polynôme $\chi(x, y)$ de degré $k + 1$ tel que

$$\left\{\begin{aligned} &\chi(x + 1, y) - \chi(x, y) = \psi(x, y) \\ &\chi(x, y + 1) - \chi(x, y) = \omega(x, y); \end{aligned}\right. \tag{12}$$

alors la fonction

$$F(x, y) - \chi(x, y)$$

admettra pour x et y les deux périodes 1.

Dans certains cas particuliers, ces fonctions peuvent se réduire à des transcendantes déjà connues. Ainsi, si l'on suppose, dans ce qui précède,

$$R(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x + yi} + \frac{1}{x - yi}\right],$$

la fonction $F(x, y)$ formée avec $R(x, y)$ comme il vient d'être indiqué s'exprimera à l'aide de la fonction

$$\frac{d \log \theta_1(u)}{du}.$$

5. Voici encore une application à un exemple du théorème du § 2. Supposons, dans ce théorème,

$$\varphi_\nu(x, y) = (x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2 \tag{13}$$

m et n variant comme précédemment de $-\infty$ à $+\infty$. Posons

$$G_1(x, y) = \prod [(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2].$$

le produit étant étendu aux valeurs de m et n qui rendent la quantité (7) négative ou nulle, et

$$G_2(x, y) = \prod{}' \frac{(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2}{m^2 + n^2 + a^2} e^{\gamma_\nu(x, y)}$$

où

$$\gamma_\nu(x, y) = -\frac{2mx + 2ny + x^2 + y^2}{m^2 + n^2 + a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2mx + 2ny + x^2 + y^2}{m^2 + n^2 + a^2}\right)^2$$

le produit $\prod'$ étant étendu aux valeurs de m et n qui rendent cette quantité (7) positive; alors la fonction $G(x, y)$ cherchée sera

$$G(x, y) = G_1(x, y) \, . \, G_2(x, y)$$

Cette fonction n'admet pas les périodes 1 pour x et y; elle vérifie des équations de la forme

$$G(x + 1, y) = e^{\psi(x, y)} G(x, y)$$

$$G(x, y + 1) = e^{\omega(x, y)} G(x, y)$$

où ψ et ω sont des polynômes du troisième degré vérifiant l'équation (11). On pourra alors former un polynôme $\chi(x, y)$ du quatrième degré vérifiant les relation (12) et la fonction

$$e^{-\chi(x, y)}G(x, y)$$

admettra la période 1 pour chacune des variables.

On est ainsi conduit à une classe de fonctions entières admettant la période 1 pour chacune des variables x et y. Pour les former on prendra d'après les notations du § 2

$$g_\nu(x, y) = P(x + m, y + n),$$

$P(x, y)$ désignant un polynôme en x et y. Lorsque ce polynôme $P(x, y)$ est homogène, la fonction correspondante s'exprime à l'aide des fonction θ.

6. Soit, par exemple,

$$g_\nu(x, y) = (x + m)^2 + (y + n)^2;$$

la fonction $G'(x, y)$ correspondante se déduira de celle qui a été formée dans le § 5 en supposant dans (13) $\alpha = 0$. Cette fonction $G'(x, y)$ sera

$$(14) \qquad G'(x, y) = (x^2 + y^2)\prod{}' \frac{(x + m)^2 + (y + n)^2}{m^2 + n^2} e^{\gamma_\nu(x, y)}$$

avec

$$\gamma_\nu(x, y) = -\frac{2mx + 2ny + x^2 + y^2}{m^2 + n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2mx + 2ny + x^2 + y^2}{m^2 + n^2}\right)^2,$$

le produit $\prod{}'$ étant étendu aux valeurs entières de m et n de $-\infty$ à $+\infty$, la combinaison $m = n = 0$ étant exceptée. Cette fonction (14) s'exprime à l'aide des fonctions θ ou de la fonction σ de M. Weierstrass:

$$\sigma(u \mid \omega, \omega') = u\prod{}'\left(1 - \frac{u}{m\omega + n\omega'}\right)e^{\frac{u}{m\omega + n\omega'} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(m\omega + n\omega')^2}}$$

En effet en posant

$$x + yi = z, \qquad x - yi = t,$$

on a

$$\frac{(x + m)^2 + (y + n)^2}{m^2 + n^2} = \frac{z + m + ni}{m + ni} \cdot \frac{t + m - ni}{m - ni}$$

$$\gamma_\nu(x,\ y) = -\frac{z}{m+ni} - \frac{t}{m-ni} - \frac{zt}{m^2+n^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{z}{m+ni} + \frac{t}{m-ni} + \frac{zt}{m^2+n^2}\right]^2$$

d'où

$$\gamma_\nu(x,\ y) = -\frac{z}{m+ni} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{(m+ni)^2} - \frac{t}{m-ni} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{(m-ni)^2} +$$

$$+ \frac{z^2t}{(m+ni)(m^2+n^2)} + \frac{zt^2}{(m-ni)(m^2+n^2)} + \frac{1}{2}\frac{z^2t^2}{(m^2+n^2)^2}$$

Alors en posant

$$a = \sum{}' \frac{1}{(m+ni)(m^2+n^2)} = \sum{}' \frac{1}{(m-ni)(m^2+n^2)}$$

$$b = \sum{}' \frac{1}{(m^2+n^2)^2}$$

les sommes $\sum{}'$ étant étendues aux valeurs entières de m et n de $-\infty$ à $+\infty$, la combinaison $m = n = 0$ exceptée, on a

$$G'(x,\ y) = e^{azt(z+t)+\frac{1}{2}bz^2t^2}\sigma(z \mid 1,\ i)\sigma(t \mid 1,\ i);$$

et la fonction (14) est ainsi exprimée à l'aide de la fonction σ.

7. De même que nous venons de former des fonctions de deux variables simplement périodiques, l'on pourrait se proposer de former des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes en prenant dans le théorème du § 1

$$f_\nu(x,\ y) = R(x + m' + m\alpha + n\gamma,\ y + n' + m\gamma + n\beta)$$

où $R(x,\ y)$ désigne une fonction rationnelle de x et y, les différentes fonctions f_ν étant obtenues en faisant varier les quatre nombres entiers

$$m,\ m',\ n,\ n'$$

de $-\infty$ à $+\infty$. Mais il y a lieu de penser qu'il est impossible de former par cette voie des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes; c'est ce que je me propose d'examiner dans une autre occasion.

SUR UNE ESPÈCE DE COURBES SYMÉTRIQUES DE LA SIXIÈME CLASSE.

PAR

C. CRONE.

À COPENHAGUE.

En examinant une surface du quatrième ordre à une conique cuspidale(¹) mon attention s'est arrêtée sur une courbe symétrique de la sixième classe et du sixième ordre, qui s'est présentée comme le contour apparent de la dite surface vu d'un point arbitraire, c. à. d. comme la trace sur un plan du cône ayant pour sommet le point arbitraire et circonscrit à la surface. Cette courbe est sans tangentes doubles ni points doubles; elle a huit tangentes d'inflexion, symétriques deux à deux, et huit points de rebroussement, symétriques deux à deux. Si le nombre de tangentes singulières est augmenté soit d'une tangente double soit d'une tangente d'inflexion, tandis que la classe de la courbe reste la même, on a des formes spéciales, savoir: une courbe du quatrième ordre à deux points de rebroussement, mais sans points doubles, et une courbe du troisième ordre sans points doubles ni points de rebroussement.

Dans la section I de ce mémoire-ci je vais démontrer que *les courbes symétriques de la sixième classe et du sixième ordre à huit tangentes d'inflexion sont les courbes générales types, c'est à dire, que toutes les courbes douées des mêmes nombres plückeriens pourront être transformées en des courbes symétriques par une transformation homographique.* (²)

Quant aux courbes du troisième ordre cette propriété est assez connue.

(¹) Om Fladerne af 4de Orden med Tilbagegangs Keglesnit og deres Konturer. Copenhague 1881.

(²) M. ZEUTHEN m'a le premier communiqué ce théorème sans toutefois m'en donner la démonstration.

Si l'on place une courbe du quatrième ordre sans point double, mais ayant deux points de rebroussement, de manière que ces derniers points soient les points à l'infini sur le cercle, on aura la courbe symétrique nommée les ovales de DESCARTES. [1]

La courbe du sixième ordre et les deux formes spéciales ont entre elles une relation bien simple: si l'on fait tourner une de ces courbes autour de son axe de symétrie, le contour apparent de la surface de révolution engendrée, vu d'un point quelconque, sera toujours une des trois courbes. Dans la section II je démontrerai cette relation et je m'en servirai pour déduire quelques propriétés des courbes considérées.

I.

Soit donnée une courbe $k^{(n)}$ de l'ordre n, qui est coupée par une tangente arbitraire à une courbe unicursale $\chi^{(r)}$ de la classe r de telle manière, que les abscisses des points d'intersection se déterminent par une équation réductible:

$$f_1(\eta, x) \cdot f_2(\eta, x) = 0$$

$f_1(\eta, x)$ et $f_2(\eta, x)$ étant des polynômes entiers et rationnels et en x et en le paramètre η du point de contact de la tangente. Soient n_1 et n_2 les degrés des polynômes par rapport à x; on a donc:

$$n_1 + n_2 = n.$$

Les r tangentes à $\chi^{(r)}$ passant par un point arbitraire P de $k^{(n)}$ se divisent en deux groupes contenant respectivement r_1 et r_2 tangentes: sur les r_1 tangentes le point P appartient au groupe des n_1 points d'intersection déterminés par l'équation $f_1(\eta, x) = 0$, tandis que sur les r_2 tangentes P est un des n_2 points d'intersection déterminés par l'équation $f_2(\eta, x) = 0$. On voit bien, que:

$$r_1 + r_2 = r,$$

et que les degrés des fonctions f_1 et f_2 par rapport à η sont nr_1 et nr_2.

[1] Voir SALMON: Higher plane curves. Sec. Ed. p. 241.

L'équation $\triangle_1 = 0$ exprimant, que l'équation $f_1(\eta, x) = 0$ résolue par rapport à η a des racines multiples, sera du degré $2n_1(r_1 n - 1)$ par rapport à x. Nous allons énumérer les cas, où des valeurs de η correspondant à la même valeur de x coïncident.

D'abord deux points d'intersection d'une droite $x = k$ avec $k^{(n)}$ pourront coïncider. Si $x = k$ est tangente à $k^{(n)}$, $2r_1$ tangentes à $\chi^{(r)}$ coïncident deux à deux et k est une racine r_1-tuple de $\triangle_1 = 0$. Si deux points d'intersection A_1 et A_2 de $x = k$ avec $k^{(n)}$ vont se confondre en un point double P de $k^{(n)}$, une des r tangentes à $\chi^{(r)}$ passant par A_1, qui appartient, p. ex., au groupe r_1, coïncidera avec une des r tangentes passant par A_2, qui pourra appartenir soit au groupe r_1 soit au groupe r_2. Une quelconque des r tangentes à $\chi^{(r)}$ passant par P peut donc provenir soit de la coïncidence de deux tangentes appartenant toutes les deux au groupe r_1, soit de la coïncidence de deux tangentes appartenant toutes les deux au groupe r_2, soit de la coïncidence de deux tangentes appartenant à différents groupes. Si l'on désigne par d_1 et d_2 les nombres de tangentes des deux premières éspèces pour tous les d points doubles de $k^{(n)}$, on a:

$$\text{(A)} \qquad d_1 - d_2 = d(r_1 - r_2)$$

Pour chaque coïncidence de deux tangentes appartenant au groupe r_1, $x = k$ est une racine double de $\triangle_1 = 0$. Quant au cas, où $x = k$ passe par un point de rebroussement de $k^{(n)}$, il sera discuté plus tard.

Puis l'équation $f_1(\eta, x) = 0$ aura des racines multiples, si des tangentes passant par différents points d'intersection de $x = k$ avec $k^{(n)}$ coïncident. Alors $x = k$ est tangente à $\chi^{(r)}$ et k est une racine $n_1(n_1 - 1)$-tuple de $\triangle_1 = 0$.

Enfin deux tangentes passant par le même point d'intersection de $x = k$ avec $k^{(n)}$ pourront coïncider, ce qui aura lieu seulement si le point d'intersection est un point d'intersection aussi de $k^{(n)}$ avec $\chi^{(r)}$, $\chi^{(r)}$ *désignant dans ce qui suit la courbe et ses tangentes d'inflexion.* Si une branche de $k^{(n)}$ passe par un point Q de $\chi^{(r)}$ correspondant à $\eta = 0$ et $x = 0$ sans être tangente en ce point ni à la branche de $\chi^{(r)}$, à laquelle appartient le point $\eta = 0$, ni à aucune autre branche de $k^{(n)}$, on pourra pour des valeurs assez petites de η et de x correspondant à des points sur cette branche de $k^{(n)}$, développer x en série suivant des puissances ascendantes de η avec des exposants entiers et positifs. Comme cette série ne pourra

satisfaire en même temps à $f_1(\eta, x) = 0$ et à $f_2(\eta, x) = 0$, les tangentes passant par un point P pris sur la branche de $k^{(n)}$ infiniment près de Q, dont les points de contact vont coïncider au point correspondant à $\eta = 0$ doivent appartenir à un seul et même groupe parmi les groupes r_1 et r_2. Nous désignerons par s_1 et s_2 les nombres de points d'intersection de $k^{(n)}$ avec $\chi^{(r)}$ pour lesquels coïncident deux tangentes du même groupe r_1 ou deux tangentes du même groupe r_2; si $x = k$ passe par un pareil point d'intersection, k est une racine simple de $\triangle_1 = 0$ ou du discriminant $\triangle_2 = 0$ de $f_2(\eta, x) = 0$.

Si un point Q de $\chi^{(r)}$ est un point de rebroussement de $k^{(n)}$ ou si $k^{(n)}$ est tangente à $\chi^{(r)}$ en Q, les tangentes passant par un point P de $k^{(n)}$ infiniment près de Q, dont les points de contact vont coïncider en Q, pourront appartenir à différents groupes. Nous désignerons par k_1 et par t les nombres de ces points de rebroussement et de ces points de contact de $\chi^{(r)}$ avec $k^{(n)}$. On a donc en énumérant les points d'intersection de $k^{(n)}$ avec $\chi^{(r)}$:

(B) $$2(k_1 + t) + s_1 + s_2 = 2n(r - 1).$$

Le nombre de points de rebroussement de $k^{(n)}$ non compris dans k_1 sera désigné par k_2. Si deux points d'intersection A_1 et A_2 de $x = k$ avec $k^{(n)}$ vont se confondre en un des k_1 points de rebroussement P, les deux tangentes à $\chi^{(r)}$ passant par A_1, et de même les deux tangentes passant par A_2, dont les points de contact coïncident en P, appartiennent chacune à son groupe savoir r_1 ou r_2. L'équation $f_1(\eta, x) = 0$ a donc une racine double égale à la valeur de η correspondant au point P. Si deux tangentes passant par les points A_1 et A_2 coïncident en une tangente, dont le point de contact est un point $\eta = \eta_1$ différent de P, η_1 sera une racine double de $f_1(\eta, x) = 0$, et k sera une racine triple de $\triangle_1 = 0$ correspondant à cette racine double. $x = k$ sera donc en tout une racine $(3(r_1 - 1) + 1)$-tuple de $\triangle_1 = 0$. Si $x = k$ passe par un des points de rebroussement de $k^{(n)}$ compris dans le nombre k_2, k sera une racine $3r_1$-tuple de $\triangle_1 = 0$.

On a donc en énumérant les racines de $\triangle_1 = 0$:

$$2n_1(nr_1 - 1) = r_1[n(n - 1) - 2d - 3(k_1 + k_2)] + 2d_1 + 3k_2r_1 +$$
$$+ 3k_1(r_1 - 1) + rn_1(n_1 - 1) + k_1 + s_1.$$

Cette équation et celle qu'on obtient en énumérant les racines de $\triangle_2 = 0$ pourront s'écrire:

$$(C)\quad \begin{aligned} s_1 + 2d_1 - 2k_1 - 2dr_1 &= rn - r_1 n_2^2 - r_2 n_1^2 + r_1 n_1 - r_2 n_2 - 2n_1 \\ s_2 + 2d_2 - 2k_1 - 2dr_2 &= rn - r_2 n_1^2 - r_1 n_2^2 + r_2 n_2 - r_1 n_1 - 2n_2 \end{aligned}$$

Ces équations donnent par soustraction au moyen de A:

$$(D)\qquad s_1 - s_2 = 2(r_1 n_1 - r_2 n_2 - n_1 + n_2).\ [1]$$

Considérons maintenant une courbe $c^{(6)}$ du sixième ordre à huit points doubles *distincts*. Si l'on fait passer par ces huit points un faisceau $(c^{(3)})$ de courbes du troisième ordre, une courbe quelconque de ce faisceau aura deux points d'intersection avec $c^{(6)}$ sans compter les points doubles. Si la droite l joignant ces deux points ne passe pas par un point fixe elle est tangente à une courbe unicursale $\chi^{(r)}$ de la $r^{\text{ième}}$ classe. Pour déterminer la valeur de r il faut considérer deux cas distincts. *Si le neuvième point fixe du faisceau $(c^{(3)})$ coïncide avec un des points doubles A,* une courbe $c_1^{(3)}$ du faisceau aura un point double en A, tandis que les autres auront une tangente commune en ce point. On voit bien, qu'une des tangentes passant par A doit correspondre à $c_1^{(3)}$. On a donc dans les formules (C), $n_1 = 2$, $r_1 = 1$, $s_1 = 0$, et l'on doit poser $d_1 = 1$, si A est un point double de $c^{(6)}$, $d_1 = 0$, si A est un point de rebroussement de $c^{(6)}$. Comme en ce dernier cas deux points d'intersection de $c^{(6)}$ avec une tangente à $\chi^{(r)}$ déterminés par l'équation $f_1(\eta, x) = 0$ coïncident en A, ce point de rebroussement n'est pas compris dans le nombre k_1, tandis que tout autre point de rebroussement est nécessairement compris dans ce nombre. On aura au moyen de (C):

$$2d_1 - 2k_1 - 2d = -2r - 10;$$

pour $d_1 = 1$ on doit poser $k_1 + d = 8$, ce qui donne $r = 2$, pour $d_1 = 0$ on aura $k_1 + d = 7$, ce qui donne aussi $r = 2$. *Si le neuvième point fixe*

---

[1] On obtiendrait encore ces résultats en se servant d'une formule indiquée par M. ZEUTHEN dans Mathematische Annalen 1871. Si les points de deux courbes C_1 et C_2, dont les genres sont p_1 et p_2, sont liés les uns aux autres de façon qu'à chaque point de C_2 correspondent x_1 points de C_1 et à chaque point de C_1 x_2 points de C_2 on a d'après la formule de ZEUTHEN:

$$y_1 - y_2 = 2x_2(p_1 - 1) - 2x_1(p_2 - 1)$$

y_1 et y_2 désignant les nombres de coïncidences de deux points, qui, respectivement sur C_1 et C_2, correspondent à un même point de l'autre courbe. Voir aussi Acta mathematica **1.** p. 181.

du faisceau ne coïncide avec aucun point double de $c^{(6)}$ on a $d_1 = 0$ et $k_1 + d = 8$; en se servant de (C) on aura $r = 3$.

Considérons d'abord le cas, où $r = 2$. La courbe décrite par les points d'intersection d'une tangente à la conique $\chi^{(2)}$ avec la courbe correspondante $c^{(3)}$ sera du septième ordre et aura un point triple en A. Elle est donc composée de $c^{(6)}$ et d'une droite m passant par A. Une des tangentes en A à la courbe du septième ordre est la tangente commune aux courbes $c^{(3)}$; comme ces courbes ne touchent pas $c^{(6)}$ en A, m doit être leur tangente commune. Deux des points d'intersection d'une tangente à $\chi^{(2)}$ avec la courbe correspondante $c^{(3)}$ sont situés sur $c^{(6)}$, tandis que le troisième point d'intersection parcourt la droite m; comme il y a une correspondance (1, 1) entre le point d'intersection d'une tangente à $\chi^{(2)}$ avec m et le point de contact, m doit être tangente à $\chi^{(2)}$. Comme on l'a démontré plus haut la tangente correspondante à $c_1^{(3)}$ passe par A; cette tangente doit être la droite m même, car autrement tous les trois points d'intersection de m avec $c_1^{(3)}$ devraient coïncider en A, ce qui est impossible. On pourra établir la correspondance entre les tangentes à $\chi^{(2)}$ et les courbes $c_1^{(3)}$ de telle manière, que A soit un point de rebroussement de $c^{(6)}$; si un autre point fixe du faisceau $(c^{(3)})$ doit être un point de rebroussement, il faut le choisir sur $\chi^{(2)}$.[1] Si l'on choisit sur $\chi^{(2)}$ six points fixes du faisceau, le neuvième point fixe est nécessairement situé sur m, mais alors m ne pourra pas avoir un point d'intersection mobile avec les courbes $c^{(3)}$. On voit donc, que si l'on pose $r = 2$, $c^{(6)}$ ne peut avoir plus de six points de rebroussement.

Jusqu'ici on a supposé $r = 2$; *supposons maintenant* $r = 3$. Les points d'intersection des tangentes à $\chi^{(3)}$ avec les courbes correspondantes $c^{(3)}$ décriront une courbe du dixième ordre composée de $c^{(6)}$ et d'une courbe $c^{(4)}$ du quatrième ordre, décrite par le point d'intersection d'une tangente à $\chi^{(3)}$ avec la courbe correspondante $c^{(3)}$, qui n'est pas situé sur $c^{(6)}$; $c^{(4)}$ passe par les huit points doubles de $c^{(6)}$ et a un point triple en le

(1) Pour rendre cela évident il faut écrire les équations de la tangente à $\chi^{(2)}$ et du faisceau $(c^{(3)})$ sous la forme:

$$f_1(\eta) \cdot x + f_2(\eta) \cdot y + f_3(\eta) = 0 \qquad u + \eta \cdot v = 0$$

$u = 0$ et $v = 0$ désignant les équations de deux courbes $c^{(3)}$ et choisir l'origine des coordonnées soit en A, soit en un autre point fixe de $(c^{(3)})$.

neuvième point fixe du faisceau ($c^{(3)}$). Ce dernier point ne peut pas être situé sur $c^{(6)}$, car alors $c^{(6)}$ serait unicursale. Les points de $c^{(4)}$ et de $\chi^{(3)}$ ont entre eux une correspondance (1, 1), c'est à dire, un point P de $c^{(4)}$ correspond au point de contact de la tangente à $\chi^{(3)}$, dont la courbe correspondante passe par P; $c^{(4)}$ ne pourra donc être une courbe composée qu'en contenant des droites, dans lesquelles une tangente à $\chi^{(3)}$ coïncide avec une partie de la courbe $c^{(3)}$ correspondante. Un point quelconque d'une telle droite correspondra à son point de contact avec $\chi^{(3)}$.

En appliquant la formule (D) aux courbes $c^{(4)}$ et $\chi^{(3)}$ on aura en posant $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $s_1 = 0$:

$$s_2 = 6;$$

$c^{(4)}$ ne peut pas avoir un point ordinaire Q en un point d'inflexion ou un point de rebroussement de $\chi^{(3)}$ sans être tangente à $\chi^{(3)}$ en ce point, car autrement — comme nous l'avons démontré plus haut — les trois tangentes à $\chi^{(3)}$ passant par un point sur $c^{(4)}$ infiniment près de Q appartiendront à un seul et même groupe soit r_1 soit r_2.

En appliquant les formules (B) et (D) aux courbes $c^{(6)}$ et $\chi^{(3)}$, on aura en posant $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $s_1 = 0$:

$$s_2 = 8 \quad \text{et} \quad k_1 + t = 8.$$

$\chi^{(3)}$ a donc avec $c^{(6)}$ seize points d'intersection coïncidant deux à deux ou en des points de contact ou en des points de rebroussement de $c^{(6)}$.

Si l'on veut qu'un point fixe du faisceau ($c^{(3)}$) soit un point de rebroussement sur $c^{(6)}$, il faut le choisir sur $\chi^{(3)}$, c'est à dire en un point d'intersection Q de $\chi^{(3)}$ avec $c^{(4)}$. Si Q est un point d'intersection ordinaire des deux courbes ou si Q est un point de rebroussement ou un point d'inflexion de $\chi^{(3)}$ au contact de $\chi^{(3)}$ avec $c^{(4)}$, Q est compté au moins une fois dans le nombre s_2; si Q est un point de contact ordinaire de $c^{(4)}$ avec $\chi^{(3)}$ compris dans le nombre t, il ne pourra pas être un point de rebroussement de $c^{(6)}$. Car deux des trois tangentes à $\chi^{(3)}$ passant par Q auront leurs points de contact coïncidant en Q tandis que le point de contact de la troisième tangente sera un point différent de Q. Deux des courbes $c^{(3)}$ correspondantes auront donc en Q la même tangente que $\chi^{(3)}$ tandis que la troisième a une tangente différente. La courbe décrite par les points d'intersection des tangentes à $\chi^{(3)}$ avec les courbes $c^{(3)}$ a donc en Q un

point triple où deux branches sont tangentes à $\chi^{(3)}$, tandis que la troisième a une tangente différente de la tangente à $\chi^{(3)}$. Une des branches tangentes à $\chi^{(3)}$ est $c^{(4)}$; Q ne peut donc pas être un point de rebroussement de $c^{(6)}$. Il s'ensuit que $c^{(6)}$ ne peut avoir des points de rebroussement qu'aux points d'intersection de $\chi^{(3)}$ avec $c^{(4)}$ contenus dans le nombre s_2.

Si $c^{(4)}$ contient une tangente à $\chi^{(3)}$, le point de contact est compris dans le nombre t, les deux points d'intersection dans le nombre s_2. La tangente passe par le point triple de $c^{(4)}$ et par deux autres points fixes du faisceau $(c^{(3)})$. Si trois tangentes à $\chi^{(3)}$ font partie de $c^{(4)}$, le reste de $c^{(4)}$ sera une tangente double ou une tangente d'inflexion à $\chi^{(3)}$. D'ailleurs les démonstrations précédentes s'appliquant aussi aux cas, où $c^{(4)}$ est composée, on voit bien que pour $r = 3$ $c^{(6)}$ ne peut avoir plus de six points de rebroussement.

Si la droite l joignant les deux points d'intersection mobiles de $c^{(6)}$ avec une courbe $c^{(3)}$ passe constamment par un point O, l'équation de l peut s'écrire:

$$xf_1(\eta) + yf_2(\eta) = 0$$

quand on choisit l'origine des coordonnées en O. O ne pourra pas être un point double de $c^{(6)}$, car alors $f_1(\eta)$ et $f_2(\eta)$ seraient du deuxième degré par rapport à η, et la courbe décrite par les points d'intersection de l avec $c^{(3)}$ serait du septième ordre, c'est à dire elle serait composée de $c^{(6)}$ et d'une droite, ce qui est impossible, puisque elle aurait un point quadruple en O. Il est également clair, que O ne pourra pas être un point ordinaire de $c^{(6)}$. Si O n'est situé ni sur $c^{(6)}$ ni dans le neuvième point fixe B du faisceau $(c^{(3)})$, $f_1(\eta)$ et $f_2(\eta)$ seront du troisième degré par rapport à η. La courbe décrite par les points d'intersection de l avec les courbes $c^{(3)}$ sera composée de $c^{(6)}$ et d'une courbe $c^{(4)}$ du quatrième ordre passant par O et par les points doubles de $c^{(6)}$. $c^{(4)}$ a un point triple en B, et peut être composée d'une courbe du troisième ordre à point double en B et d'une droite passant par O, B et deux autres points fixes du faisceau $(c^{(3)})$. Les trois courbes $c^{(3)}$ correspondant à une droite l passent par les trois points d'intersection de l avec $c^{(4)}$ différents de O. Un point fixe Q du faisceau $(c^{(3)})$ ne pourra donc être un point de rebroussement de $c^{(6)}$ que 1° si la droite passant par Q est une tangente à $c^{(4)}$ ou 2° si $c^{(4)}$ contient une courbe du troisième ordre à un point de rebroussement en

B et que Q soit situé sur OB; $c^{(6)}$ ne pourra donc pas avoir plus de cinq points de rebroussement.

Si O coïncide avec B, les points d'intersection de l avec les courbes $c^{(3)}$ décriront outre $c^{(6)}$ une courbe du quatrième ordre à un point quadruple en O. Cette courbe est composée de quatre droites chacune contenant O et deux autres points fixes du faisceau $(c^{(3)})$. Des trois courbes $c^{(3)}$ correspondant à une de ces droites l_1 l'une est composée de l_1 et d'une conique passant par les six points fixes du faisceau non situés sur l_1; les deux autres sont tangentes à $c^{(6)}$ en les points doubles situés sur l_1. Ces deux courbes coïncideront si l'un des points doubles sur l_1 est un point de rebroussement. O est un point d'inflexion de toutes les courbes $c^{(3)}$; nous désignerons par a la droite contenant tous les points de contact des tangentes aux courbes $c^{(3)}$ menées par O. Si l'on projette $c^{(6)}$ de manière que O devienne le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à a toutes les courbes $c^{(3)}$ et par suite $c^{(6)}$ seront des courbes symétriques, dont a est l'axe de symétrie commun. $c^{(6)}$ ne peut donc avoir qu'un nombre pair de points de rebroussement.

Nous avons donc démontré que *toute courbe du 6ième ordre ayant 8 points de rebroussement et* 0 *point double peut être transformée homographiquement en une courbe symétrique.* On voit aussi *qu'il n'y a pas de courbes du 6ième ordre à 7 points de rebroussement et 1 point double.*

Considérons la courbe $k^{(6)}$ du sixième ordre et de la sixième classe à huit points de rebroussement. Si l est représentée par l'équation $y = \alpha x$ et si η est le paramètre de la courbe $c^{(3)}$, à laquelle la droite représentée par $y = \eta x$ est tangente en O, il y a entre α et η une équation du premier degré par rapport à α et du troisième degré par rapport à η. Si l'on pose $\alpha = \eta$, cette équation donnera les paramètres des quatre droites passant par O et deux autres points fixes du faisceau $(c^{(3)})$. Soient ces paramètres 0, ∞, β et γ. Comme pour $\alpha = \infty$ l'équation entre α et η résolue par rapport à η aura une racine double η_1, elle pourra s'écrire:

$$\eta(\eta - \beta)(\eta - \gamma) + a(\eta - \alpha)(\eta - \eta_1)^2 = 0$$

a désignant une constante. En substituant $\alpha = 0$, $= \beta$ et $= \gamma$ et en divisant l'équation respectivement par η, $\eta - \beta$ et $\eta - \gamma$, on aura trois équations du second degré. Comme chacune de ces équations a deux racines égales, on a:

$$4(1+a)(\beta\gamma - a\eta_1^2) - (\beta+\gamma+2a\eta_1)^2 = 0$$
$$4(1+a)\eta_1^2 - (\gamma+2a\eta_1)^2 = 0$$
$$4(1+a)a\eta_1^2 - (\beta+2a\eta_1)^2 = 0.$$

La soustraction des deux dernières équations donne, le facteur $\beta - \gamma$ supprimé: $\beta + \gamma = -4a\eta_1$; en ajoutant on a $\beta\gamma = -4a\eta_1^2$. Si dans la première des trois équations on substitue $\eta_1 = \dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$ et $a = \dfrac{-(\beta+\gamma)^2}{4\beta\gamma}$ l'équation se réduit à:

$$\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre droites joignant 2 points de rebroussement symétriques de la courbe $k^{(6)}$ est donc = une des valeurs imaginaires de $(-1)^{\frac{1}{3}}$, c'est à dire, les quatre droites ont la situation équianharmonique.

II.

Désignons par $k^{(6)}$, $k^{(4)}$ et $k^{(3)}$ les trois courbes à examiner. En tournant autour de leurs axes de symétrie elles engendrent trois surfaces de révolution $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ et $F^{(3)}$ de la sixième classe. Chacune des trois surfaces a quatre cônes circonscrits engendrés par deux tangentes d'inflexion symétriques. $F^{(6)}$ a quatre cercles de rebroussement; $F^{(4)}$ a un cercle de rebroussement et est touchée par un plan D perpendiculaire à l'axe de révolution le long d'un cercle $d^{(2)}$. $F^{(3)}$ est coupée par un plan V perpendiculaire à l'axe de révolution suivant trois droites coïncidant à l'infini.

Je désignerai par $\chi^{(2)}$ toute conique ayant avec une des courbes symétriques deux contacts stationnaires en deux points symétriques. Si les deux points de contact sont soit deux points de rebroussement soit les deux points de contact d'une tangente double, la conique $\chi^{(2)}$ se réduit à une conique infiniment aplatie dont les sommets occupent soit les points de rebroussement soit les points de contact de la tangente double. Si les points de contact de $\chi^{(2)}$ sont deux points d'inflexion symétriques, $\chi^{(2)}$ se compose des deux tangentes d'inflexion. Si le point à l'infini dans la

direction perpendiculaire à l'axe de symétrie est un point d'inflexion de la courbe symétrique et que les points de contact de $\chi^{(2)}$ se confondent en ce point, $\chi^{(2)}$ sera une conique infiniment aplatie renfermée dans la tangente d'inflexion, dont les sommets coïncident à l'infini. — Si l'on fait tourner la courbe symétrique autour de son axe de symétrie, on aura une surface de révolution, dont *la surface du second ordre engendrée par une conique* $\chi^{(2)}$ *contiendra trois parallèles consécutifs. Nous désignerons par* $H^{(2)}$ *cette surface du second ordre;* ses géneratrices sont les tangentes principales à la surface, c'est à dire, les asymptotes de l'indicatrice, en les points du cercle de contact. Il faut remarquer, que si $\chi^{(2)}$ est une conique infiniment aplatie, dont les sommets coïncident à l'infini, elle engendrera une surface $H^{(2)}$ qui se réduit aux deux points I et J à l'infini sur le cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe de révolution.

Maintenant nous allons projeter chacune des surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ et $F^{(3)}$ d'un centre de projection quelconque P sur un plan perpendiculaire au plan passant par P et par l'axe de révolution. Le contour apparent sera donc toujours une courbe symétrique de la sixième classe. La trace d'un plan A passant par P sera une tangente double ou une tangente d'inflexion dans les trois cas suivants: 1° si A est tangent à un cône engendré par deux tangentes d'inflexion symétriques à la courbe méridienne de la surface; alors la trace de A est une tangente d'inflexion; 2° si A est un plan tangent à la surface, dont P est le point de contact; alors les points de contact de la trace de A sont les traces des tangentes principales à la surface en P, et la trace de A sera une tangente d'inflexion, si P est choisi sur $d^{(2)}$ ou sur un cercle de rebroussement; 3° si A est un plan perpendiculaire à l'axe de révolution et tangent à la surface le long d'un cercle; alors les points de contact sont les traces des tangentes menées par P au cercle de contact.

On voit donc, que, si P n'est choisi ni sur les surfaces ni dans D ni dans V le contour apparent vu de P sera une courbe de la sixième classe sans tangente double, mais qui aura huit tangentes d'inflexion, c'est à dire, la courbe $k^{(6)}$. Si P est un point ordinaire d'une des surfaces, ou si P est choisi soit dans le plan D soit dans le plan V, le contour apparent sera une courbe de la sixième classe avec huit tangentes d'inflexion et une tangente double, c'est à dire, $k^{(4)}$. Si P est choisi soit sur la droite à l'infini de $F^{(3)}$ soit sur $d^{(2)}$ soit sur un cercle de rebroussement

le contour apparent vu de P sera une courbe de la sixième classe sans tangente double et ayant neuf tangentes d'inflexion, c'est à dire, $k^{(3)}$.

Nous désignerons par I et J les points à l'infini sur le cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe de révolution d'une quelconque des surfaces. Les points I et J de la surface $F^{(6)}$ sont des points triples; ce sont de points doubles sur les surfaces $F^{(4)}$ et $F^{(3)}$. Les droites joignant I et J aux points d'intersection de la surface avec l'axe de révolution sont contenues dans la surface. Ces droites sont projetées comme les tangentes menées au contoúr apparent de la surface par les projections de I et de J. On voit donc, que le contour apparent de $F^{(6)}$ ne passe pas par les projections de I et de J, tandis que le contour apparent de $F^{(4)}$ passe toujours par les projections de I et de J, si le centre de projection n'est pas choisi dans le plan D. Les points I et J de $F^{(3)}$ sont projetés comme des points de rebroussement d'un centre de projection quelconque non situé dans V.

Comme les points de rebroussement des contours sont ou bien les projections de points singuliers des surfaces ou bien les traces des tangentes principales passant par le centre de projection, on voit, qu'on peut faire passer par un point arbitraire P quatre surfaces $H^{(2)}$ circonscrites à une des surfaces $F^{(6)}$ ou $F^{(4)}$. Si l'on considère la surface $F^{(3)}$, une des quatre surfaces $H^{(2)}$ se réduit aux points I et J. Si P est un point ordinaire d'une des surfaces, trois des quatre surfaces $H^{(2)}$ coïncident avec celle dont le cercle de contact passe par P. Si P est choisi dans un des plans D ou V, trois des quatre surfaces $H^{(2)}$ se réduisent à ce plan.

Du théorème démontré à la fin de la section I on déduit les résultats suivants en désignant par ε une des valeurs imaginaires de $(-1)^{\frac{1}{3}}$.

Construisons les quatre surfaces $H^{(2)}$ circonscrites à $F^{(6)}$ ou à $F^{(4)}$, ou les quatre coniques $\chi^{(2)}$ ayant deux contacts stationnaires avec $k^{(6)}$ ou $k^{(4)}$, qui passent par un point donné P. Alors le rapport anharmonique des quatre plans tangents aux surfaces $H^{(2)}$ en P, et de même le rapport anharmonique des quatre tangentes aux coniques $\chi^{(2)}$ en P, sera $= \varepsilon$. Ce théorème est encore vrai pour la surface $F^{(3)}$ et pour la courbe $k^{(3)}$ à cela près, que par rapport à $F^{(3)}$ et à $k^{(3)}$ s'opère respectivement la réduction d'une des surfaces $H^{(2)}$ et d'une des coniques $\chi^{(2)}$ à un plan perpendiculaire à l'axe de révolution (c. à. d. passant par la droite IJ) d'une part et d'autre part à une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie.

Comme la courbe correspondant à $k^{(6)}$ d'après le principe de dualité est une courbe de la même espèce, le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de l'axe de symétrie avec les tangentes d'inflexion, est aussi égal à ε. On a donc:

Le rapport anharmonique des sommets des quatre cônes $H^{(2)}$ circonscrits aux surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$, et de même le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de deux tangentes d'inflexion symétriques aux courbes $k^{(6)}$, $k^{(4)}$ et $k^{(3)}$, est $= \varepsilon$.

Ce théorème est susceptible d'extension. Comme deux tangentes d'inflexion symétriques à une section faite dans une des surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$ par un plan quelconque sont deux génératrices d'une surface $H^{(2)}$ tangente au plan, on a le théorème sous la forme suivante:

Etant donnés un plan et une des surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$ on peut construire quatre surfaces $H^{(2)}$ tangentes au plan. Le rapport anharmonique des points de contact est $= \varepsilon$. De même parmi les coniques $\chi^{(2)}$ ayant avec une des courbes $k^{(6)}$, $k^{(4)}$ ou $k^{(3)}$ deux contacts stationnaires il y en a quatre qui sont tangentes à une droite donnée, et le rapport anharmonique des quatre points de contact est $= \varepsilon$.

Le contour d'une surface $H^{(2)}$ vu d'un point P est une conique $\chi^{(2)}$ à deux contacts stationnaires avec le contour de la surface, à laquelle $H^{(2)}$ est circonscrite, vu du même point P. On a donc le théorème suivant:

Si l'on considère une des surfaces $F^{(6)}$, $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$, on trouve quatre surfaces $H^{(2)}$ tangentes à une droite donnée. Le rapport anharmonique des points de contact, ainsi que celui des quatre plans tangents aux surfaces $H^{(2)}$ en ces points de contact, est $= \varepsilon$.

Pour cela on doit considérer une section faite dans la surface par un plan passant par la droite, ou le contour apparent de la surface vu d'un point sur la droite.(1)

On pourra faire passer trois cônes de révolution circonscrits à la surface $F^{(4)}$ par le cercle de rebroussement $k^{(2)}$. Ces cônes portent dans mon mémoire cité plus haut le nom de *cônes kummériens,* parceque pour la surface $F^{(4)}$ ils jouent le même rôle que les cônes kummériens des surfaces du quatrième ordre à une conique double. Le contour de $F^{(4)}$

(1) Cette remarque m'a été communiquée par M. Zeuthen.

vu d'un point P de $k^{(2)}$ est une courbe $k^{(3)}$; les traces des plans tangents en P à la surface et aux cônes kummériens sont la tangente d'inflexion r et les trois tangentes ordinaires à $k^{(3)}$ perpendiculaires à l'axe de symétrie, tandis que les quatre droites de la surface passant par I sont projetées comme quatre tangentes à $k^{(3)}$ menées par un point sur la courbe. On voit donc que les quatre sommets $TT_1T_2T_3$ du cône circonscrit à $F^{(4)}$ le long de $k^{(2)}$ et des cônes kummériens ont le même rapport anharmonique que les quatre points d'intersection $A_1A_2A_3A_4$ de $F^{(4)}$ avec l'axe de révolution. L'involution de couples de points déterminée, p. ex. par les couples de points A_1A_2 et A_3A_4 contient un couple composé p. ex. des points T et T_1 et un couple composé de T_2 et T_3, et l'on aura $(A_1A_2A_3A_4) = = (TT_1T_2T_3)$ ou $= \frac{1}{(TT_1T_2T_3)}$.(¹) On voit donc, que les quatre points d'intersection d'une courbe $k^{(4)}$ avec son axe de symétrie ont le même rapport anharmonique que la tangente en un point de rebroussement et les trois tangentes menées à la courbe par le point de rebroussement. Le contour de la surface $F^{(6)}$, vu d'un point P sur la surface, et de même le contour d'une des surfaces $F^{(4)}$ ou $F^{(3)}$, vu d'un point P pris soit sur la surface, soit dans le plan D, soit dans le plan V, est la courbe $k^{(4)}$. Les points d'intersection de $k^{(4)}$ avec son axe de symétrie sont les projections des sommets des quatre cônes de révolution circonscrits à la surface et passant par P. Les points de rebroussement Q et Q_1 de $k^{(4)}$ sont les traces des deux génératrices PQ et PQ_1 de la surface $H^{(2)}$ passant par P, mais dont le cercle de contact est différent du parallèle passant par P; la tangente à $k^{(4)}$ en Q et les trois autres tangentes à $k^{(4)}$ menées par Q sont les traces des quatre plans tangents communs à la surface et à $H^{(2)}$ passant par la génératrice PQ, dont le premier a un point commun de contact avec les deux surfaces; ce point est situé sur leur cercle de contact. Le rapport anharmonique des sommets des quatre cônes circonscrits passant par P est donc égal à celui des sommets des quatre cônes circonscrits communs à la surface et à $H^{(2)}$; l'un de ces cônes est circonscrit à $H^{(2)}$ le long de son cercle de contact avec la surface. Le théorème démontré pourra donc s'énoncer de la manière suivante:

Par le rapport anharmonique d'une conique $\chi^{(2)}$ ayant avec une des courbes

(¹) Voir mon mémoire cité plus haut p. 78.

$k^{(3)}$, $k^{(4)}$ *ou* $k^{(6)}$ *deux contacts stationnaires en deux points symétriques nous désignerons celui des quatre points d'intersection de l'axe de symétrie avec les tangentes communes à* $\chi^{(2)}$ *et à la courbe, deux de ces tangentes étant les tangentes à* $\chi^{(2)}$ *aux points de contact avec la courbe. Nous avons donc démontré, que le rapport anharmonique d'une conique* $\chi^{(2)}$ *est égal au rapport anharmonique des quatre tangentes menées à la courbe par un quelconque des points d'intersection de* $\chi^{(2)}$ *soit avec la courbe, soit avec la tangente double à* $k^{(4)}$, *soit enfin avec la tangente d'inflexion* v *à* $k^{(3)}$.

Le nombre de coniques $\chi^{(2)}$ ayant un rapport anharmonique donné peut se trouver de la manière suivante. Considérons une courbe $k^{(3)}$ et choisissons pour l'axe des ordonnées v et pour l'axe des abscisses l'axe de symétrie. Si par deux points symétriques de v determinés par $y^2 = \beta$ on mène les tangentes à $k^{(3)}$, les abscisses des points d'intersection des tangentes avec l'axe de symétrie se détermineront par une équation du quatrième degré $L = 0$, dont les coefficients sont des polynômes entiers et rationnels du troisième degré par rapport à β. Le rapport anharmonique h des points d'intersection se détermine par l'équation:

$$(1) \qquad i^3 - 24k \,.\, j^2 = 0$$

où $k = \dfrac{(1 - h + h^2)^3}{(1 + h)^2 (2 - h)^2 (1 - 2h)^2}$, tandis que i et j sont les invariantes de $L = 0$ du second et du troisième degré respectivement par rapport aux coefficients. Comme pour $\beta = 0$ toutes les racines de $L = 0$ s'évanouissent de telle manière, que la limite du rapport $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{x}$ a quatre valeurs, qui ne sont ni $= 0$ ni $= \infty$, il faut, que les coefficients de x et de x^0 soient divisibles par β^2, d'où s'ensuit, que i^3 et j^2 sont divisibles par β^6. Ce facteur supprimé l'équation (1) pourra s'écrire sous la forme:

$$(2) \qquad A^3 - 24k \,.\, B^2 = 0$$

A^3 et B^2 étant du douzième degré par rapport à β. Pour $k = 1$ on a:

$$A^3 - 24B^2 \equiv D = 0$$

ou $D = 0$ désigne le discriminant de l'équation $L = 0$, divisé par β^6. $L = 0$ n'a de racines doubles que pour $y = 0$ ou $y =$ l'ordonnée d'un point d'intersection de v avec une autre tangente d'inflexion. Soit y_1 une telle ordonnée; $\beta = y_1^2$ sera donc une racine triple de $D = 0$, et $D = 0$

pourra s'écrire $E^3 = 0$, ou les racines de l'équation du quatrième degré par rapport à β $E = 0$ correspondent aux dits points d'intersection. On voit donc que l'équation (2) pourra s'écrire:

$$(3) \quad (1-k)A^3 + kE^3 \equiv (1-k)\left[A + \sqrt[3]{\frac{k}{1-k}}E\right]\left[A + \varepsilon\sqrt[3]{\frac{k}{1-k}}E\right]\left[A + \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{k}{1-k}}E\right] = 0.$$

Il y a une correspondance (1, 1) entre le paramètre β d'un couple de points sur v et le paramètre α, p. ex. l'abscisse commune des deux points de contact de la conique $\chi^{(2)}$ passant par le couple de points sur v; comme le rapport anharmonique des quatre droites passant par les points de contact de deux tangentes d'inflexion symétriques est $= \varepsilon$,(¹) on voit, que le rapport anharmonique des racines de $E = 0$ a la même valeur. Considérons une surface $F^{(4)}$ ou $F^{(6)}$ et son contour apparent $k^{(3)}$ vu d'un point pris sur un cercle de rebroussement; il y aura donc une correspondance (1, 1) entre le paramètre α de deux points symétriques sur $k^{(3)}$ et le paramètre γ du parallèle passant par les points de la surface, dont les deux points sur $k^{(3)}$ sont les projections. Il existe donc entre β et γ une relation linéaire par rapport à tous les deux paramètres, et au moyen de cette relation on peut introduire γ dans l'équation (3) en éliminant β. Si pour paramètre d'une surface $H^{(2)}$ on choisit le paramètre du cercle de contact, on voit, que les paramètres des surfaces $H^{(2)}$ circonscrites à une des surfaces $F^{(3)}$, $F^{(4)}$ et $F^{(6)}$, qui ont un rapport anharmonique donné, se determinent par une équation de la forme (3). Il y a donc 12 coniques à deux contacts stationnaires avec une des courbes $k^{(3)}$, $k^{(4)}$ ou $k^{(6)}$, qui ont un rapport anharmonique donné; si le rapport anharmonique est $= -1$ ou $= \varepsilon$, le nombre de coniques $\chi^{(2)}$ se réduit respectivement à 6 et à 4. Les nombres de points sur $k^{(6)}$ ou sur $k^{(4)}$, par lesquels on peut mener quatre tangentes à la courbe, dont le rapport anharmonique a une valeur donnée, sont donc égaux à 72 ou à 24; si la valeur donnée est $= -1$, les nombres se réduisent à 36 et à 12, si elle est $= \varepsilon$, les nombres se réduisent à 24 et à 8.

Copenhague 10 janvier 1883.

(¹) Voir Clebsch: Vorlesungen über Geometrie, 1 Bd., Leipzig 1876, p. 564.

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

PAR

H. POINCARÉ
à PARIS.

1. On sait que M. Weierstrass a démontré au sujet des fonctions d'une seule variable le théorème suivant:

Si $F(x)$ est une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan, c'est à dire n'ayant à distance finie d'autre singularité que des pôles, on peut la mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières.

Le théorème analogue pour les fonctions de deux variables n'est pas encore démontré. Je crois être arrivé à en donner une démonstration rigoureuse, mais comme elle est un peu longue, je n'en donnerai pas ici tous les détails; je me bornerai à en exposer les traits principaux qui suffiront aux géomètres pour la reconstituer.

Voici quel est le problème.

Je considère une fonction de deux variables $F(X, Y)$ et je suppose que dans le voisinage d'un point quelconque X_0, Y_0, on puisse la mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, N et D étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $X - X_0$ et $Y - Y_0$ et convergentes lorsque les modules de ces quantités sont suffisamment petits. Je suppose de plus que, lorsque les modules de $X - X_0$ et $Y - Y_0$ restent assez petits, les deux séries N et D ne peuvent s'annuler à la fois que pour des points isolés. Je dis que cette fonction peut se mettre sous la forme $\frac{G(X, Y)}{G_1(X, Y)}$, G et G_1 étant des séries ordonnées suivant les puissances de X et Y et *toujours* convergentes. Ainsi autour du point X_0, Y_0 il existera par hypothèse une région R_0 où la fonction

F pourra se mettre sous la forme $\frac{N_0}{D_0}$; de même autour d'un autre point X_1, Y_1, il existera une région R_1 où F pourra s'écrire $\frac{N_1}{D_1}$. Mais si les deux régions R_0 et R_1 ont une partie commune, N_1 pourra ne pas être la *continuation analytique* de N_0. Tout ce que nous savons, c'est que dans la partie commune aux deux régions, le rapport $\frac{N_1}{N_0}$ ne devient ni nul ni infini.

2. On sait que la partie réelle u d'une fonction d'une variable imaginaire $x + iy$, satisfait à l'équation $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$, de sorte que l'étude des fonctions d'une seule variable se ramène à l'étude d'une attraction s'exerçant en raison inverse de la distance. On a vu dans les derniers numéros des Mathematische Annalen, quel parti M. Klein a su tirer de considérations physiques qui sont au fond tout à fait analogues. De même si nous posons:

$$X = x + iy \qquad Y = z + it$$

la partie réelle u d'une fonction quelconque de X et de Y satisfera à l'équation:

$$\triangle u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

de sorte qu'à ce point de vue l'étude des fonctions de deux variables se ramène à celle d'une *attraction s'exerçant dans l'espace à quatre dimensions en raison inverse du cube de la distance.* M. Kronecker a déjà fait voir (Monatsberichte 1869) que la considération d'une pareille attraction peut être utile au géomètre qui veut étudier les fonctions de plusieurs variables. Je n'emploierai pas cependant le langage hypergéométrique; je me bornerai à lui emprunter quelques expressions. Ainsi l'ensemble des points x, y, z, t qui satisfont à l'inégalité:

(1) $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (t - t_0)^2 < R^2$$

s'appellera une *région hypersphérique* dont le centre sera x_0, y_0, z_0, t_0 et le rayon R. L'ensemble des points qui satisferont à l'égalité:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (t - t_0)^2 = R^2$$

formeront une *surface hypersphérique.*

Il y a toutefois une différence essentielle entre cette théorie et celle des fonctions d'une seule variable. Pour que u soit la partie réelle d'une fonction de X et de Y, il ne suffit pas qu'il satisfasse à l'équation $\triangle u = 0$. Il doit en outre satisfaire aux équations suivantes:

$$\triangle_1 u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \qquad \triangle_2 u = \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

$$\triangle_3 u = \frac{d^2u}{dy\,dz} - \frac{d^2u}{dx\,dt} = 0 \qquad \triangle_4 u = \frac{d^2u}{dx\,dz} + \frac{d^2u}{dy\,dt} = 0$$

J'appellerai *fonction potentielle* toute fonction u qui satisfait à l'équation $\triangle u = 0$. Je supposerai que ma fonction potentielle est holomorphe pour toutes les valeurs de x, y, z, t, sauf pour certaines valeurs exceptionnelles qui formeront des points singuliers, ou même des lignes et des plages singulières.

Toute fonction potentielle qui n'aura aucune singularité à distance finie sera dite *entière*. Toute fonction potentielle entière qui reste constamment inférieure à une quantité donnée se réduit à une constante.

3. Voici la marche que je vais suivre dans la démonstration:

1° Je construirai une infinité de régions hypersphériques R_1^0, R_2^0, ... Je supposerai qu'un point quelconque x, y, z, t appartienne au moins à une, et au plus à cinq de ces régions; cela est toujours possible. Je supposerai de plus que ces régions sont choisies de telle sorte qu'à l'intérieur de R_i^0 par exemple, la fonction F peut se mettre sous la forme $\frac{N_i}{D_i}$; j'appelle M_i le module de D_i.

J'envisage également les régions R_i^1 formées par la partie commune à deux des régions R_i^0, et les régions R_i^2, R_i^3, R_i^4 formées par la partie commune à trois, à quatre, ou à cinq de ces régions hypersphériques.

2° Je construirai une fonction potentielle J_i^p jouissant des propriétés suivantes: elle est holomorphe à l'extérieur de R_i^p, et tend vers 0 quand $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ croît indéfiniment; à l'intérieur de R_i^p, la différence $J_i^p - \log M_i$ est holomorphe; enfin sur la limite de la région R_i^p, J_i^p est holomorphe quand $\log M_i$ l'est lui-même.

3° Je montrerai ensuite qu'on peut former une fonction potentielle Φ existant pour toutes les valeurs de x, y, z, t, et telle que si en un

point quelconque, F peut se mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, la différence Φ — log mod D soit holomorphe.

4° Puis, je ferai voir que Φ peut s'écrire:

$$\Phi_1 + G$$

G étant une fonction potentielle entière et Φ_1 étant la partie réelle d'une fonction imaginaire $\Phi_1 + i\Phi'_1$ de X et de Y.

Le théorème énoncé sera alors démontré, car les fonctions $e^{\Phi_1+i\Phi'_1}$ et $F.e^{\Phi_1+i\Phi'_1}$ seront des fonctions entières de X et de Y.

Principe de Dirichlet.

4. Considérons la région hypersphérique dont l'équation est:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

et qui a par conséquent pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Je pose:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\cos\psi,\ z = r\sin\theta\sin\psi\cos\varphi,\ t = r\sin\theta\sin\psi\sin\varphi$$

Soient ξ, η, ζ, τ quatre quantités liées par la relation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \tau^2 = 1$$

et posons

$$\xi = \cos\theta',\ \eta = \sin\theta'\cos\psi',\ \zeta = \sin\theta'\sin\psi'\cos\varphi',\ \tau = \sin\theta'\sin\psi'\sin\varphi'$$

$$x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = ar$$

$$\sin^2\theta'\sin\psi' d\theta' d\varphi' d\psi' = d\omega'$$

Soit v une fonction quelconque des angles θ, ψ, φ; soit v' ce que devient v quand on y remplace θ, ψ, φ par θ', ψ' et φ'. Considérons l'intégrale triple:

$$V = \int \frac{v' d\omega'}{1 - 2ar + r^2}$$

étendue à toute la surface hypersphérique. Cette fonction V sera évidemment une fonction potentielle qui sera holomorphe tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la région hypersphérique, mais cessera de l'être sur la surface hypersphérique elle-même. Supposons maintenant que le point x, y, z, t, vienne sur cette surface, c'est à dire que r se réduise à 1; V se réduira à une fonction V_0 de θ, φ et ψ définie par l'intégrale triple

$$V_0 = \frac{1}{2}\int \frac{v' d\omega'}{1 - a}$$

la limite de V est toujours V_0 quand r tend vers l'unité, soit par valeurs inférieures, soit par valeurs supérieures à l'unité; donc V est une fonction toujours continue. Il n'en est pas de même de sa dérivée $\frac{dV}{dr}$ comme on le verra plus loin. De plus on peut démontrer que V_0 sera holomorphe en θ, φ et ψ pour les mêmes valeurs que la fonction v elle même.

La fonction:

$$r\frac{dV}{dr} = 2\int \frac{(ar - r^2)v' d\omega'}{(1 - 2ar + r^2)^2}$$

est aussi une fonction potentielle holomorphe à l'intérieur et à l'extérieur de la région hypersphérique; mais cette fonction présente une discontinuité pour $r = 1$. Elle tend vers $\pi^2 v - V_0$ pour $r = 1 - \varepsilon$, c'est à dire quand r tend vers 1 par des valeurs inférieures à 1 et vers $-\pi^2 v - V_0$ pour $r = 1 + \varepsilon$, c'est à dire quand r tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

Tout ce qui précède ne suppose pas que v reste fini; cette fonction peut devenir infinie pour certaines valeurs de θ, φ, ψ, *pourvu qu'elle reste intégrable;* j'entends par là que l'intégrale triple

$$\int v' f d\omega'$$

(où f est une fonction quelconque finie de θ', φ' et ψ') doit être finie. Ainsi, si A et A_1 sont deux fonctions holomorphes de θ, φ, ψ, dont les déterminants fonctionnels par rapport à deux de ces variables ne s'annulent pas à la fois, la fonction v pourra devenir infinie toutes les fois que

$A = A_1 = 0$ pourvu que $r(A^2 + A_1^2)^m$ reste fini, m étant supposé plus petit que 1.

5. Considérons maintenant la fonction suivante:

$$\frac{1}{\pi^2}\left(V + r\frac{dV}{dr}\right) = \frac{1}{\pi^2}\int \frac{(1-r^2)v'd\omega'}{(1-2ar+r^2)^2}$$

Cette fonction, d'après ce qui précède, est une fonction holomorphe pour $r \gtrless 1$; pour $r = 1$ elle se réduit à $\pm v$ selon que r tend vers 1 par valeurs inférieures ou supérieures à cette limite. Or la fonction v est une fonction donnée quelconque, qui n'est assujettie qu'à être intégrable. Nous savons donc construire une fonction potentielle qui reste holomorphe à l'intérieur d'une région hypersphérique et qui prend des valeurs données sur la surface de cette région. C'est le principe de Dirichlet étendu aux fonctions de deux variables.

6. Ce qui précède s'applique évidemment à une région hypersphérique quelconque. On peut même étendre, en appliquant directement la belle méthode de M. Schwarz, le principe de Dirichlet à une région quelconque et en particulier à une région limitée par des portions de surfaces hypersphériques. Mais il y a une différence essentielle avec la théorie des fonctions d'une seule variable. Il n'y a qu'une seule fonction potentielle holomorphe u qui prenne sur les limites d'une région donnée une suite de valeurs déterminées, et cette fonction ne satisfait pas en général aux équations:

$$\triangle_1 u = \triangle_2 u = \triangle_3 u = \triangle_4 u = 0$$

de sorte qu'il est impossible en général de construire une fonction de $x + iy$ et de $z + it$ qui n'ait pas de singularités dans une région donnée, et dont la partie réelle prenne des valeurs déterminées à l'avance sur les limites de cette région. C'est là qu'il faut chercher la véritable explication des différences si profondes que l'on observe entre les fonctions d'une variable et celles de deux variables et en particulier de ce fait que l'on ne peut construire une fonction de deux variables ayant quatre périodes quelconques.

Formation des Fonctions J_i^0.

7. Considérons une des régions que nous avons appelées R_i^0 et supposons qu'à l'intérieur de cette région on ait $F = \frac{N_i}{D_i}$; N_i et D_i étant holomorphes en X et en Y.

Je pose:

$$D_i = A + \sqrt{-1}.A_1 \qquad M_i^2 = A^2 + A_1^2$$

Je suppose enfin que la région R_i^0 soit hypersphérique et, pour fixer les idées, je supposerai comme aux paragraphes 4 et 5 qu'elle ait pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Sur la surface hypersphérique qui limite R_i^0, le logarithme de M_i se réduit à une fonction de θ, φ et ψ que j'appelle v. Cette fonction est intégrable d'après la règle exposée à la fin du paragraphe 4. Le principe de Dirichlet nous permet donc de former une fonction potentielle.

$$u = \frac{1}{\pi^2}\int \frac{(1 - r^2)v'd\omega'}{(1 - 2ar + r^2)^2}$$

qui est holomorphe pour $r < 1$ et se réduit à v pour $r = 1 - \varepsilon$.

Si nous posons comme plus haut:

$$V = \int \frac{v'd\omega'}{1 - 2ar + r^2} \qquad 2V_0 = \int \frac{v'd\omega'}{1 - a}$$

nous aurons:

$$\pi^2 u = V + r\frac{dV}{dr}$$

d'où:

$$\pi^2\frac{du}{dr} = 2\frac{dV}{dr} + r\frac{d^2V}{dr^2}$$

Mais l'équation $\triangle V = 0$ peut s'écrire:

$$r^2\frac{d^2V}{dr^2} + 3r\frac{dV}{dr} + DV = 0$$

en posant pour abréger:

$$DV = \frac{d^2V}{d\theta^2} + \operatorname{cos\acute{e}c}^2\theta \frac{d^2V}{d\varphi^2} + \operatorname{cos\acute{e}c}^2\theta \operatorname{cos\acute{e}c}\varphi \frac{d^2V}{d\psi^2} + 2\cot\theta\frac{dV}{d\theta} + \operatorname{cos\acute{e}c}^2\theta\cot\varphi\frac{dV}{d\varphi}$$

d'où:

$$-\pi^2 r\frac{du}{dr} = r\frac{dV}{dr} + DV$$

et si w est ce que devient $\frac{du}{dr}$ pour $r = 1 - \varepsilon$

$$\pi^2 w = V_0 - \pi^2 v - DV_0$$

Mais V_0 et par conséquent DV_0 est holomorphe en θ, φ et ψ, toutes les fois que la fonction v l'est elle-même, c'est à dire pourvu que l'on n'ait pas à la fois $A = A_1 = 0$. Il en est donc de même de w.

Quand $r > 1$, la fonction u est holomorphe, mais elle se réduit à $-v$ pour $r = 1 + \varepsilon$, et est par conséquent discontinue pour $r = 1$. Quant à la fonction $\frac{du}{dr}$, elle se réduit à:

$$v + \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0)$$

pour $r = 1 + \varepsilon$, puisque $r\frac{dV}{dr}$ se réduit à $-\pi^2 v - V_0$ d'après le paragraphe 4.

Soit maintenant λ ce que devient $\frac{d\log M_i}{dr}$ pour $r = 1$. On aura:

$$\lambda = \frac{r\frac{dM_i}{dr}}{M_i} = \frac{x\frac{dM_i}{dx} + y\frac{dM_i}{dy} + z\frac{dM_i}{dz} + t\frac{dM_i}{dt}}{\sqrt{A^2 + A_1^2}}$$

Ainsi, le produit $\lambda\sqrt{A^2 + A_1^2}$ restant fini quand A et A_1 s'annulent à la fois, la fonction λ est intégrable, et nous pourrons écrire, en appelant λ' ce que devient λ quand on y change θ, φ, ψ en θ', φ', ψ':

$$W = \int \frac{\lambda' d\omega'}{1 - 2ar + r^2} \qquad 2W_0 = \int \frac{\lambda' d\omega}{1 - a}$$

W sera une fonction potentielle analogue à V, et W_0 sera holomorphe en θ, φ, ψ en même temps que λ, c'est à dire toutes les fois que M_i ne s'annulera pas.

Définissons maintenant notre fonction J_i^0 ainsi qu'il suit; elle sera égale:

$$\text{pour } r > 1 \quad \text{à} \quad -\frac{u}{2} - \frac{V}{2\pi^2} - \frac{W}{2\pi^2}$$

$$\text{pour } r < 1 \quad \text{à} \quad \log M_i - \frac{u}{2} - \frac{V}{2\pi^2} - \frac{W}{2\pi^2}$$

Quand r tendra vers 1 *soit par valeurs supérieures, soit par valeurs inférieures à 1*, J_i^0 et $\frac{dJ_i^0}{dr}$ tendront respectivement vers:

$$\frac{v}{2} - \frac{V_0}{2\pi^2} - \frac{W_0}{2\pi^2} \quad \text{et} \quad \frac{DV_0}{2\pi^2} + \frac{W_0}{2\pi^2} + \frac{\lambda}{2}$$

Ainsi les deux fonctions J_i^0 et $\frac{dJ_i^0}{dr}$ sont continues pour $r = 1$, et elles se réduisent pour $r = 1$ à des fonctions de θ, φ, ψ qui sont holomorphes pourvu que M_i ne soit pas nul.

Mais d'après le théorème de Mme de KOWALEVSKY, il n'y a qu'une seule fonction analytique F de r, θ, φ, ψ qui satisfasse à l'équation $\triangle F = 0$ et qui se réduise ainsi que sa dérivée $\frac{dF}{dr}$ à des fonctions analytiques données de θ, φ et ψ quand on fait $r = 1$. Les deux portions de la fonction J_i^0 sont donc la *continuation analytique* l'une de l'autre. La fonction J_i^0 satisfait donc bien aux conditions imposées. On peut voir d'ailleurs qu'elle est intégrable sur la surface hypersphérique R_i^0.

Ce que je viens de dire s'applique évidemment à une région hypersphérique quelconque.

8. La fonction J_i^0 peut se mettre sous la forme suivante. Soient ξ, η, ζ, τ quatre fonctions de u et de v telles que l'on ait identiquement:

$$D_i(\xi + i\eta,\ \zeta + i\tau) = 0;$$

soit δ une fonction convenablement choisie de u et de v, on peut écrire:

$$J_i^0 = \int\int \frac{\partial du dv}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 + (\tau - t)^2}$$

l'intégrale double s'étendant aux valeurs de u et de v telles que le point ξ, η, ζ, τ soit à l'intérieur de R_i^0.

9. Si une fonction potentielle u est holomorphe à l'intérieur et à l'extérieur d'une certaine région R; si elle tend vers 0 quand $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$ croît indéfiniment; si elle est encore holomorphe sur la limite même de la région R, excepté sur une certaine ligne singulière pour laquelle nous ne savons rien; si enfin elle est intégrable sur la limite même de la région R, je dis qu'elle est identiquement nulle.

Je suppose d'abord que la région R soit hypersphérique et, pour fixer les idées, qu'elle a pour équation:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

Si l'on fait $r = 1$, notre fonction u devient une certaine fonction v de θ, φ, ψ, qui par hypothèse est intégrable. Soit v' ce que devient v quand on y change θ, φ, ψ en θ', φ', ψ'. La fonction v étant intégrable, nous pourrons former les intégrales suivantes:

$$U = \frac{1}{\pi^2}\int \frac{(1 - r^2)v'd\omega'}{(1 - 2ar + r^2)^2} \qquad V = \int \frac{v'd\omega'}{1 - 2ar + r^2} \qquad 2V_0 = \int \frac{v'd\omega'}{1 - 2ar + r^2}$$

Pour $r > 1$, on aura $U = -u$ et pour $r < 1$, on aura $U = u$; on aura donc pour $r = 1 + \varepsilon$

$$\frac{du}{dr} = -v - \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0)$$

et pour $r = 1 - \varepsilon$

$$\frac{du}{dr} = -v + \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0)$$

Mais la fonction étant holomorphe par hypothèse même pour $r = 1$, sa dérivée doit être continue, c'est à dire que l'on a pour $r = 1$:

$$\frac{du}{dr} = -v \qquad\qquad V_0 - DV_0 = 0$$

Mais alors les deux fonctions potentielles u et $-r\frac{du}{dr}$, ayant même valeur sur la surface hypersphérique, seront identiques et l'on aura:

$$u + r\frac{du}{dr} = 0$$

Cette identité entraine la suivante:

$$u = \frac{v}{r}$$

Mais u doit être holomorphe pour $r = 0$, et cela ne peut avoir lieu vu l'identité précédente, que si v et u sont identiquement nuls.

C. Q. F. D.

10. Je suppose maintenant que la région R soit la partie commune à deux régions hypersphériques S et S_1, dont j'écrirai les équations sous la forme:

$$S = 0 \qquad\qquad S_1 = 0$$

de telle sorte que la région R se compose de l'ensemble des points x, y, z, t, qui satisfont à la fois aux deux inégalités:

$$S < 0 \qquad\qquad S_1 < 0$$

La région R aura alors pour limites deux portions s et s_1 des deux surfaces hypersphériques S et S_1; et par hypothèse notre fonction u pourra cesser d'être holomorphe sur deux lignes singulières l et l_1 situées respectivement sur s et s_1, *mais sans cesser d'être intégrable.*

Considérons une surface hypersphérique Σ ayant pour équation

$$S + S_1 = 0$$

et passant par conséquent par l'intersection des deux surfaces hypersphériques S et S_1. Je suppose que s et l soient extérieures à Σ et que s_1 et l_1 soient intérieures à Σ; nous pourrons, en faisant jouer à notre fonction u le même rôle que jouait $\log M_i$ dans le paragraphe 7, construire une fonction u_1, jouissant des propriétés suivantes:

1° Elle sera holomorphe à l'extérieur de Σ, et par conséquent sur la portion de surface s.

2° La différence $u - u_1$ sera holomorphe à l'intérieur de Σ, et par conséquent u_1 ne pourra cesser d'être holomorphe que sur la ligne singulière l, mais sans cesser d'être intégrable.

D'après le paragraphe précédent la fonction u_1 est identiquement nulle. On verrait de même que la fonction $u - u_1$ qui ne peut cesser d'être holomorphe que sur la ligne singulière l_1 et qui ne cesse pas d'être intégrable, doit être identiquement nulle. Il en est donc ainsi de la fonction u elle-même.

C. Q. F. D.

Formation des Fonctions J_i^1.

11. Considérons deux régions hypersphériques R_i^0 et R_k^0, les deux surfaces hypersphériques S_i et S_k qui leur servent de limite, et les fonctions J_i^0 et J_k^0 correspondantes. Je puis, en faisant jouer à J_k^0 le même rôle que jouait $\log M_i$ dans le paragraphe 7, construire une fonction J_i^1 qui soit holomorphe à l'extérieur de R_i^0 et telle que la différence $J_k^0 - J_i^1$ soit holomorphe à l'intérieur de R_i^0. Considérons la région R_i^1 formée par la partie commune à R_i^0 et à R_k^0 et limitée par deux portions de surfaces hypersphériques s_i et s_k appartenant respectivement aux deux surfaces S_i et S_k. Notre fonction J_i^1 est alors holomorphe à l'extérieur de R_i^1 et sa différence avec $\log M_i$ est holomorphe à l'intérieur de R_i^1.

On peut construire de la même manière une autre fonction K_i^1 qui soit holomorphe à l'extérieur de R_k^0 et telle que la différence $J_i^0 - K_i^1$ soit holomorphe à l'intérieur de R_k^0. Cette fonction est identique à J_i^1, car la différence $K_i^1 - J_i^1$ ne peut cesser d'être holomorphe que sur les portions de surfaces s_i et s_k et seulement aux points où M_i s'annule. Elle ne cesse d'ailleurs pas d'être intégrable. Elle est donc nulle.

12. Considérons maintenant l'ensemble des deux régions R_i^0 et R_k^0 et la fonction $J_i^0 + J_k^0 - J_i^1$; supposons qu'en un point quelconque inté-

rieur à l'une des deux régions R_i^0 et R_k^0, F se mette sous la forme $\frac{N}{D}$; je dis que la différence:

$$J_i^0 + J_k^0 - J_i^1 - \log \operatorname{mod} D$$

est holomorphe.

En effet, si le point considéré n'appartient pas à s_i ou à s_k, cela est évident; mais supposons qu'il appartienne à l'une de ces portions de surfaces, par exemple à s_i; les différences $J_k^0 - \log \operatorname{mod} D$ et $J_i^0 - J_i^1$ seront holomorphes d'après la façon même dont ces fonctions J_k^0 et J_i^1 ont été construites. Il en est donc de même de leur somme $J_i^0 + J_k^0 - J_i^1 - \log \operatorname{mod} D$.

C. Q. F. D.

13. On formerait de même les fonctions J_i^2, J_i^3, J_i^4. Supposons que l'on envisage n régions hypersphériques R_1^0, R_2^0, ... R_n^0; puis toutes les régions R_i^1 formées des parties communes à deux quelconques de ces n régions; puis toutes les régions R_i^2, R_i^3, R_i^4 formées des parties communes à trois, à quatre, ou à cinq quelconques de ces n régions hypersphériques. Formons les diverses fonctions J_i^0, J_i^1, J_i^2, J_i^3, J_i^4 correspondant à ces diverses régions R_i^0, R_i^1, R_i^2, R_i^3, R_i^4. On voit aisément, comme au paragraphe 12, que si en un point quelconque intérieur à l'une des n régions R_i^0, la fonction F se met sous la forme $\frac{N}{D}$, la fonction:

$$\sum J_i^0 - \sum J_i^1 + \sum J_i^2 - \sum J_i^3 + \sum J_i^4 - \log \operatorname{mod} D$$

est holomorphe.

Formation de la fonction Φ.

14. Pour former la fonction Φ il suffit d'appliquer, sans y rien changer, la méthode par laquelle M. Weierstrass a démontré le théorème de M. Mittag-Leffler.

Une fonction potentielle U qui ne présente pas de singularité à l'origine peut se développer suivant les puissances croissantes de x, y, z, t. Si la série ainsi obtenue est convergente, toutes les fois que

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < r^2$$

r sera le *rayon de convergence.*

Soient ε et ε_n^p deux nombres positifs quelconques, le premier plus petit que 1. Soit U_m ce que devient le développement de la fonction U suivant les puissances de x, y, z, t quand on y supprime tous les termes d'ordre inférieur à m. On pourra toujours prendre m assez grand pour que

$$\text{mod } U_m < \varepsilon_n^p \quad \text{toutes les fois que} \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < \varepsilon^2 r^2$$

On pourra alors trouver un nombre $\varepsilon < 1$ et une série de nombres positifs ε_n^p dont la somme soit convergente. Supposons de plus, ce qui est permis, que l'origine ait été choisie de telle sorte qu'aucune des fonctions J_i^p n'y présente de singularité, J_n^p pourra alors être développé suivant les puissances de x, y, z, t; appelons K_n^p ce que devient J_n^p quand on y supprime les termes de degré inférieur à m_n^p. Nous supposerons que m_n^p a été choisi assez grand pour que:

$$\text{mod } K_n^p < \varepsilon_n^p$$

toutes les fois que

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < \varepsilon^2 (r_n^p)^2$$

r_n^p étant le rayon de convergence de la série J_n^p. La fonction:

$$\Phi = \sum_n{}_1^\infty K_n^0 - \sum_n{}_1^\infty K_n^1 + \sum_n{}_1^\infty K_n^2 - \sum_n{}_1^\infty K_n^3 + \sum_n{}_1^\infty K_n^4$$

satisfera alors aux conditions énoncées, c'est à dire que si dans le voisinage d'un point quelconque on a:

$$F = \frac{N}{D}$$

la différence

$$\Phi - \log \text{mod } D$$

sera holomorphe.

Formation de Φ_1 et de G.

15. La fonction Φ satisfait à l'équation $\triangle \Phi = 0$; mais elle ne satisfait pas en général aux équations:

$$\triangle_1 \Phi = \triangle_2 \Phi = \triangle_3 \Phi = \triangle_4 \Phi = 0$$

Les expressions $\triangle_1 \Phi$, $\triangle_2 \Phi$, $\triangle_3 \Phi$, $\triangle_4 \Phi$ sont des fonctions potentielles. Je dis qu'elles sont entières. En effet dans le voisinage d'un point quelconque la fonction $\Phi - \log \bmod D$ est holomorphe; il en est donc de même de $\triangle_1 \Phi - \triangle_1 \log \bmod D$ et de $\triangle_1 \Phi$, puisque $\triangle_1 \log \bmod D = 0$.

Les fonctions $\triangle_1 \Phi$, $\triangle_2 \Phi$, $\triangle_3 \Phi$, $\triangle_4 \Phi$ sont donc entières et par conséquent développables suivant les puissances de x, y, z, t quelles que soient les valeurs de ces quantités.

16. Il s'agit de former une fonction Φ_1 satisfaisant à la fois aux équations:

$$\triangle_1 \Phi_1 = \triangle_2 \Phi_1 = \triangle_3 \Phi_1 = \triangle_4 \Phi_1 = 0$$

et telle que la différence $\Phi - \Phi_1 = G$ soit une fonction entière. Pour cela, il suffit de trouver une fonction entière G qui satisfasse aux équations:

$$(1) \qquad \begin{matrix} \triangle_1 G = \triangle_1 \Phi & \qquad \triangle_2 G = \triangle_2 \Phi \\ \triangle_3 G = \triangle_3 \Phi & \qquad \triangle_4 G = \triangle_4 \Phi \end{matrix}$$

Je dis que cela est toujours possible. Posons en effet:

$$G = \sum A_{m.n.p.q.} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

Voici la condition pour que G soit une fonction entière.

Posons:

$$m + n + p + q = s$$

et considérons un instant s comme un nombre donné. Soit H_s la plus

grande valeur que puisse prendre le module de $A_{m.n.p.q}$. G sera une fonction entière si l'expression:

$$H_s \frac{r^s}{s!}$$

tend vers 0 quand s croît indéfiniment et cela *quel que soit r*.

Posons:

$$\triangle_1 \Phi = \sum B_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$\triangle_2 \Phi = \sum C_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$\triangle_3 \Phi = \sum D_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$\triangle_4 \Phi = \sum E_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

Soit P_s la plus grande valeur que puisse prendre le module de $B_{m.n.p.q}$, $C_{m.n.p.q}$, $D_{m.n.p.q}$, $E_{m.n.p.q}$; s étant toujours supposé constant. Le produit:

$$P_s \frac{r^s}{s!}$$

tendra vers 0 quel que soit r quand s croîtra indéfiniment, puisque les $\triangle_i \Phi$ sont des fonctions entières.

Les équations (1) nous donnent:

$$A_{m.n.p.q} + A_{m-2.n+2.p.q} = B_{m-2.n.p.q}$$

$$A_{m.n.p.q} + A_{m.n.p-2.q+2} = C_{m.n.p-2.q}$$

$$A_{m.n.p.q} - A_{m+1.n-1.p-1.q+1} = D_{m.n-1.p-1.q}$$

$$A_{m.n.p.q} + A_{m-1.n+1.p-1.q+1} = E_{m-1.n.p-1.q}$$

Si nous supposons toujours s constant, nous avons $\frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{1.2.3.4}$ inconnues qui sont les A et $\frac{(s-1)s(s+1)(s+2)}{1.2.3}$ équations à résoudre. Mais

nous savons que ces équations sont compatibles, puisqu'on peut toujours satisfaire aux équations (1) en faisant $G = \Phi$. Nous pouvons même nous donner arbitrairement les $2s + 1$ coëfficients

$$A_{m.0.s-m.0} \quad \text{et} \quad A_{m-1.1.s-m.0}$$

Nous les prendrons égaux à 0. On a alors, comme on le voit aisément:

$$H_s < P_{s-2}\frac{(s+1)^2}{4}$$

d'où:

$$\lim H_s \frac{r^s}{s!} = 0$$

Donc G est une fonction entière. Donc Φ_1 est une fonction qui satisfait aux 4 équations $\triangle_i \Phi_1 = 0$ de sorte qu'on peut trouver une fonction imaginaire $\Phi_1 + \sqrt{-1}\,\Phi'_1$ dont elle soit la partie réelle. D'ailleurs il est clair que la différence

$$\Phi_1 + \sqrt{-1}\,\Phi'_1 - \log D$$

est partout holomorphe.

Le théorème est donc démontré.

17. Il n'est pas douteux que des considérations analogues à celles qui précèdent ne puissent être très utiles dans l'étude de divers points délicats de la théorie des fonctions de deux variables.

Elles peuvent servir à démontrer le théorème suivant: Si Y est une fonction quelconque de X, non uniforme, qui ne présente pas de point singulier essentiel à distance finie et qui ne puisse pas, pour une même valeur de X, prendre une infinité de valeurs finies infiniment voisines les unes des autres; elle pourra être considérée comme la solution d'une équation:

$$G(X, Y) = 0$$

où G est une fonction entière.

18 Janvier 1883.

SUR DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES ANALOGUES AUX FONCTIONS MODULAIRES

PAR

EMILE PICARD
à PARIS.

On sait à quelle classe importante de fonctions d'une variable conduit, quand elle est possible d'une manière uniforme, l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques. On peut procéder d'une manière analogue pour obtenir une classe remarquable de fonctions de deux variables indépendantes: considérons, à cet effet, un système d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles:

$$r = ap + bq + cz$$

$$s = a_1p + b_1q + c_1z$$

$$t = a_2p + b_2q + c_2z$$

où les a, b, c sont des fonctions algébriques des deux variables indépendantes x et y.

Ces équations ne peuvent avoir plus de trois solutions communes linéairement indépendantes; supposons qu'elles existent effectivement et désignons les par ω_1, ω_2 et ω_3. Les cas où les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v nous conduisent à des fonctions de deux variables analogues à ces fonctions uniformes

d'une variable obtenues par l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre.

Je me propose d'indiquer dans cette étude un exemple de fonctions de deux variables pouvant être obtenues par cette voie. Considérons d'abord les expressions

$$\int_g^h \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x et ∞. Il est bien connu qu'elles satisfont à l'équation linéaire du second ordre

$$(x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} = 0$$

et on sait qu'en prenant deux solutions convenables ω_1 et ω_2 de cette équation la fonction x de u donnée par l'équation:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$$

est uniforme et définie seulement pour la moitié du plan de la variable u située au dessus de l'axe réel: c'est la fonction modulaire qui joue un rôle si important dans la théorie des fonctions elliptiques.

Envisageons maintenant les intégrales définies

$$\int_g^h \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}}$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x, y et ∞. Ces expressions considérées comme fonctions de x et y satisfont aux trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles:

$$9x(x-1)(x-y)r = (-5x^2 + 4xy + 3x + 2y)3p - 3y(1-y)q + (x-y)z$$

$$3(x-y)s = p - q$$

$$9y(y-1)(y-x)t = -3x(1-x)p + (-5y^2 + 4xy + 3y + 2x)q + (y-x)z;$$

ces équations ont trois solutions communes linéairement indépendantes. *Nous établissons qu'en désignant par ω_1, ω_2, ω_3 trois solutions convenables, les équations:*

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega}{\omega_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v, fonctions qui ne seront définies, si on pose $u = u' + iu''$ et $v = v' + iv''$, que pour les valeurs de u et v satisfaisant à l'inégalité

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

Ainsi, de même que la fonction modulaire n'est définie que pour les valeurs de la variable u, telles que $u'' > 0$, nos deux fonctions x et y ne sont définies que pour les valeurs des variables indépendantes u et v vérifiant l'inégalité précédente.

Ces fonctions x et y restent invariables quand on effectue sur u et v une infinité de substitutions linéaires; nous donnons les substitutions fondamentales de ce groupe. Je termine en montrant rapidement l'intérêt que peuvent présenter ces fonctions x et y dans l'étude des fonctions abéliennes auxquelles conduit la relation algébrique entre z et t

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

relation pour laquelle le nombre caractéristique p est égal à trois. *Nos fonctions de u et de v jouent dans la théorie de ces fonctions abéliennes le même rôle que la fonction modulaire dans la théorie des fonctions elliptiques.*

(1). Partons de la relation algébrique entre les deux variables z et t:

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

où x et y désignent deux constantes.

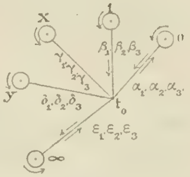
Cette courbe est du troisième genre ($p = 3$); et on peut prendre comme intégrales de première espèce les trois intégrales suivantes:

$$\Omega = \int^{t'} \frac{dt}{z^2}$$

$$I = \int^{t'} \frac{t\,dt}{z^2}$$

$$W = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{z}.$$

Soit t_0 un point quelconque du plan de la variable t, distinct seulement de 0, 1, x, y. Quelle que soit la disposition des points 0, 1, x et y, on peut joindre le point t_0 aux points 0, 1, x, y par des lignes ne se coupant pas et se suivant autour du point t_0 dans l'ordre 0, 1, x, y; ces lignes nous serviront à définir les lacets élémentaires comme on le fait habituellement dans la théorie des fonctions algébriques. Nous considérerons enfin un cinquième lacet joignant le point t_0 au point ∞; nous le représentons sur la figure que l'on peut supposer être la sphère, et, je le repète, les lacets se suivent autour de t_0 dans l'ordre 0, 1, x, y et ∞. Supposons que t partant de t_0, z ayant la valeur z_1, t_0 décrive le premier lacet, soit α_1 la valeur de l'intégrale Ω, désignons de même par α_2 et α_3 les valeurs de la même intégrale quand pour $t = t_0$, z a successivement ses deux autres déterminations z_2 et z_3. Nous représenterons de même par les lettres β, γ, δ, ε affectées des indices 1, 2, 3 les valeurs analogues de la même intégrale relatives aux autres lacets.



Considérons maintenant les six expressions:

$$a_1 = \beta_1 + \gamma_2 + \delta_3$$

$$a_2 = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3$$

$$a_3 = \beta_1 + \beta_2 + \gamma_3$$

$$a_4 = -(\gamma_1 + \beta_2 + \gamma_3)$$

$$a_5 = -(\gamma_1 + \delta_2 + \beta_3)$$

$$a_6 = \gamma_1 + \alpha_2 + \beta_3$$

c'est un système de périodes pour l'intégrale Ω, puisque chacune de ces quantités représente la valeur de Ω le long d'un cycle fermé.

Prenons de même l'intégrale W; désignant par α', β', γ' et δ' les quantités analogues aux α, β, γ, δ et posant

$$A_1 = \beta'_1 + \gamma'_2 + \delta'_3$$
$$A_2 = \alpha'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3$$
$$A_3 = \beta'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3$$
$$A_4 = -(\gamma'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3)$$
$$A_5 = -(\gamma'_1 + \delta'_2 + \beta'_3)$$
$$A_6 = \gamma'_1 + \alpha'_2 + \beta'_3$$

nous avons un système de six périodes de l'intégrale W.

Nous commençons par chercher la relation entre les périodes a et A. Suivant la méthode habituelle, nous écrirons que l'intégrale de Riemann

$$\sum \int \Omega dW$$

prise le long du contour simple formé par les cinq lacets est nulle, la somme $\sum$ s'étendant aux trois déterminations z_1, z_2, z_3 de z pour $t = t_0$.

Un calcul immédiat donne tout d'abord pour l'expression précédente:

$$\begin{aligned}
&a_1(\alpha'_1 - \beta'_1) + a_2(\beta'_3 - \alpha'_3) \\
&+ (a_1 + \beta_2)(\beta'_2 - \gamma'_2) + (a_2 + \beta_3)(\gamma'_1 - \beta'_1) \\
&+ (a_1 + \beta_2 + \gamma_3)(\gamma'_3 - \delta'_3) + (a_2 + \beta_3 + \gamma_1)(\delta'_2 - \gamma'_2) \\
&+ (a_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \delta_1)(\delta'_1 + \varepsilon'_2) + (a_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \delta_2)(\varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 - \delta'_3);
\end{aligned}$$

on a d'ailleurs, bien évidemment

$$\alpha'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3 + \delta'_1 + \varepsilon'_2 = 0$$
$$\alpha'_2 + \beta'_3 + \gamma'_1 + \delta'_2 + \varepsilon'_3 = 0$$
$$\alpha'_3 + \beta'_1 + \gamma'_2 + \delta'_3 + \varepsilon'_1 = 0$$

Dans cette relation apparaissent de suite les périodes de W, car les différences telles que $\alpha'_1 - \beta'_1$, $\beta'_2 - \gamma'_2$, ... sont des périodes, puisque

$$\alpha'_1 - \beta'_1 = \alpha'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 \ \ldots$$

il en est de même pour les termes de la dernière ligne, en remarquant que le lacet ∞ ne permute pas les racines dans l'ordre 1, 2, 3 comme les autres lacets, mais dans l'ordre circulaire inverse. On a d'ailleurs:

$$\alpha'_1 - \beta'_1 = \alpha'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 = A_2 - A_3 , \qquad \beta'_3 - \alpha'_3 = A_6 + A_2 + A_4$$

$$\beta'_2 - \gamma'_2 = - A_4 \qquad \gamma'_1 - \beta'_1 = - A_3 - A_4 .$$

$$\gamma'_3 - \delta'_3 = A_4 + A_3 - A_1 \qquad \delta'_2 - \gamma'_2 = A_3 - A_5$$

$$\delta'_1 + \varepsilon'_2 = - A_2 \qquad \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 - \delta'_3 = - A_2 - A_6$$

substituons ces valeurs dans l'expression précédente et ordonnons par rapport à $A_1, A_2, \ldots A_6$. Il vient

$$\begin{gathered} - A_1(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + A_2(\alpha_1 - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 - \delta_1 + \alpha_2 - \alpha_2 - \beta_3 - \gamma_1 - \delta_2) + \\ + A_3(- \alpha_1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - \alpha_2 - \beta_3 + \alpha_2 + \beta_3 + \gamma_1) + \\ + A_4(- \alpha_1 - \beta_2 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \alpha_2 - \alpha_2 - \beta_3) + A_5(- \alpha_2 - \beta_3 - \gamma_1) + \\ + A_6(\alpha_2 - \alpha_2 - \beta_3 - \gamma_1 - \delta_2), \end{gathered}$$

on a donc par suite

$$- A_1 a_2 + A_2 a_1 - A_3 a_4 + A_4 a_3 - A_5 a_6 + A_6 a_5 = \sum \int \Omega dW = 0$$

Telle est la relation entre les périodes A et a des intégrales Ω et W; on voit que ces périodes sont précisément des périodes normales.

On va voir maintenant que l'on peut facilement évaluer trois des périodes A au moyen des trois autres. En effet quand t étant parti de t_0, avec une certaine valeur initiale pour z, revient au point t_0 après avoir décrit un lacet dans le sens indiqué par la flèche (fig. 1), la valeur de z se trouve multipliée par λ, λ étant la racine cubique imaginaire de l'unité

$$\lambda = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

on en déduit de suite que

$$A_4 = \lambda A_3 , \quad A_5 = - \lambda A_1 , \quad A_6 = \lambda^2 A_2$$

et on trouvera pareillement relativement aux a

$$a_4 = \lambda^2 a_3 , \quad a_5 = - \lambda^2 a_1 , \quad a_6 = \lambda a_2$$

et la relation trouvée devient

$$\lambda^2 a_2 A_1 + a_1 A_2 + \lambda a_3 A_3 = 0 \tag{1}$$

En désignant par b les quantités analogues aux a relatives à l'intégrale U, on aura de même

$$\lambda^2 b_2 A_1 + b_1 A_2 + \lambda b_3 A_3 = 0 \tag{2}$$

et nous avons alors le tableau des périodes normales pour les trois intégrales Ω, U et W

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & -\lambda^2 a_1 & a_2 & \lambda^2 a_3 & \lambda a_2 \\ b_1 & b_3 & -\lambda^2 b_1 & b_2 & \lambda^2 b_3 & \lambda b_2 \\ A_1 & A_3 & -\lambda A_1 & A_2 & \lambda A_3 & \lambda^2 A_2 \end{Vmatrix}$$

avec les relations (1) et (2).

Passons maintenant aux intégrales normales, nous aurons le tableau des périodes

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 + \frac{2}{1-\lambda^2}\frac{A_2}{A_1} & -\lambda^2\frac{A_3}{A_1} & \frac{1}{1-\lambda^2}\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2\frac{A_3}{A_1} & \lambda^2 & -\frac{A_3}{A_1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-\lambda^2}\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\frac{1}{1-\lambda^2} & -\frac{A_3}{A_1} & \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 + \frac{2}{1-\lambda^2}\frac{A_2}{A_1} \end{Vmatrix}$$

les a et les b s'éliminent d'eux-mêmes, en remarquant que les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\lambda^2 A_1} = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{A_2} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\lambda A_3}.$$

tableau qui deviendra, en posant

$$\frac{A_2 \lambda^2}{A_1} = v, \quad \frac{A_3}{A_1} = u$$

$$(\mu) \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}u^2 + \frac{2i\sqrt{3}}{3}v & -\lambda^2 u & \frac{1}{1-\lambda^2}u^2 - \frac{i\sqrt{3}}{3}v \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 u & \lambda^2 & -u \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-\lambda^2}u^2 - \frac{i\sqrt{3}}{3}v & -u & \frac{\lambda}{1-\lambda^2}u^2 + \frac{2i\sqrt{3}}{3}v \end{Vmatrix}$$

Si l'on fait abstraction des trois premières colonnes et que l'on désigne par α_{gh} $(g, h = 1, 2, 3)$ le coefficient de i dans le terme donné par l'intersection de la ligne de rang g et de la colonne de rang h; on sait que la forme quadratique $\sum m_g m_h \alpha_{gh}$ doit être définie et négative, or ce tableau des coefficients de i est en posant:

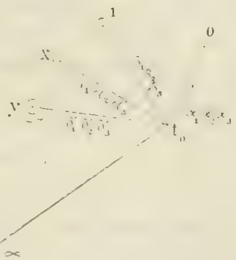
$$u = u' + iu'', \quad v = v' + iv''$$

$$\begin{vmatrix} -u''u' - \frac{u'^2 - u''^2}{6}\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}v & \frac{u'\sqrt{3} + u''}{2} & u'u'' - \frac{u'^2 - u''^2}{6}\sqrt{3} - \frac{v'\sqrt{3}}{3} \\ \frac{u'\sqrt{3} + u''}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -u'' \\ u'u'' - \frac{u'^2 - u''^2}{6}\sqrt{3} - \frac{v'\sqrt{3}}{3} & -u'' & \frac{(u'^2 - u''^2)\sqrt{3}}{3} + \frac{2v'\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix}$$

Une série de calculs tout élémentaires montre que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme désignée par $\sum m_g m_h \alpha_{gh}$ soit définie et négative, se réduit à

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

(2). Nous venons de voir que le tableau des périodes des intégrales normales ne renferme que les deux rapports u et v



$$u = \frac{A_3}{A_1}, \quad v = \frac{\lambda^2 A_2}{A_1}$$

Arrêtons nous maintenant sur les quantités A_1, A_2, A_3. Il est clair qu'elles ne dépendent pas de la valeur de t_0, ce sont des fonctions des seules quantités x et y et c'est à ce point de vue qu'il est intéressant pour notre objet de les considérer. Nous avons en effet

$$A_1 = \beta'_1 + \gamma'_2 + \delta'_3 = -(\varepsilon'_1 + \alpha'_3) =$$

$$= -(1 - \lambda)\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{z} - \lambda(1 - \lambda^2)\int_{t_0}^{0}\frac{dt}{z} = (1 - \lambda)\left| -\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{z} + \int_{t_0}^{0}\frac{dt}{z}\right|$$

les valeurs initiales de z dans ces intégrales étant z_1 pour $t = t_0$.

On a de la même manière

$$A_2 = \alpha'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3 = \alpha'_1 + \lambda^2\beta'_1 + \lambda\gamma'_1 = (1-\lambda^2)\int_{t_0}^{0} + \lambda^2(1-\lambda^2)\int_{t_0}^{1} + \lambda(1-\lambda^2)\int_{t_0}^{x} =$$

$$= (\lambda^2 - \lambda)\left[\int_{t_0}^{1} - \int_{t_0}^{0}\right] + (\lambda - 1)\left[\int_{t_0}^{x} - \int_{t_0}^{1}\right]$$

et enfin

$$A_3 = (\lambda - 1)\left[\int_{t_0}^{x} - \int_{t_0}^{1}\right]$$

A_1, A_2 et A_3 sont donc des combinaisons linéaires et homogènes d'intégrales de la forme:

$$\int_g^h \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)(t-y)}}$$

g, h désignant 0, 1, x ou y.

On peut appliquer à ces intégrales un résultat général établi dans mon mémoire sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de RIEMANN relatif aux séries hypergéométriques (*Annales de l'Ecole Normale, 1881*). J'y ai considéré les intégrales de la forme

$$\int_g^h t^{b_1-1}(t-1)^{b_2-1}(t-y)^{b_3-1}(t-x)^{\lambda-1}dt$$

g, h désignant deux quelconques des quantités 0, 1, y, x et ∞. Ces expressions satisfont à un système de trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles ayant trois solutions communes linéairement indépendantes et trois seulement; j'écris seulement deux de ces équations:

$$(x-y)s = (1-b_3)p + (\lambda - 1)q$$

$$(\varepsilon) \quad x(x-1)(x-y)r + [(5 - 2\lambda - b_1 + b_2 - b_3)x^2 + (2\lambda + b_1 + b_2 - 4)xy +$$
$$+ (\lambda - 3 + b_1 + b_3)x - (\lambda + b_1 - 2)y]p + (1-\lambda)y(1-y)q +$$
$$+ (\lambda - 1)(3 - \lambda - b_1 - b_2 - b_3)(x-y)z = 0$$

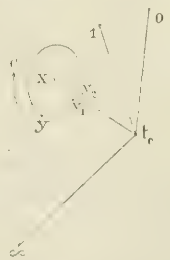
où p, q, r, s désignent, suivant l'usage, les dérivées partielles de z par rapport à x et y. Ces équations, avec d'autres notations, ont été, à un autre point de vue, rencontrées par M. Appell dans son beau travail sur les séries hypergéométriques de deux variables *(C. R. 1880 et Journal de Liouville).*

Dans le cas actuel, on a

$$b_1 = b_2 = b_3 = \lambda = \frac{2}{3}$$

et en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, on aura un système de deux équations simultanées (ε) admettant trois solutions communes linéairement indépendantes, auxquelles satisfont les périodes A_1, A_2 et A_3 considérées comme fonctions de x et y. Ce système d'équations linéaires rappelle l'équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale elliptique considérées comme fonctions du module et cette analogie nous apparaîtra plus étroite encore quand nous ferons l'inversion des rapports des périodes.

3. Nous allons maintenant chercher le groupe des substitutions qui permettent d'exprimer toutes les déterminations de A_1, A_2, A_3 au moyen d'un système de ces valeurs. Laissant y constant, nous allons d'abord faire tourner successivement y autour des points 0, 1 et x et chercher la substitution linéaire correspondante. Nous avons trouvé plus haut les expressions de A_1, A_2, A_3 au moyen d'intégrales définies prises suivant certaines lignes allant de t_0 au point 0, 1, x et ∞. Ces intégrales sont des fonctions uniformes et continues de y, tant que y ne franchit aucune de ces coupures.



Faisons décrire à y le contour C enveloppant le point x, la coupure t_0x a été franchie, voyons quelles variations vont en résulter pour A_1, A_2, A_3. Des quatre intégrales

$$\int_{t_0}^{x} \frac{dt}{z}, \quad \int_{t_0}^{1} \frac{dt}{z}, \quad \int_{t_0}^{0} \frac{dt}{z}, \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{z}$$

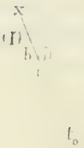
la première seule prend une valeur différente.

Soient y_1 et y_2 deux points de part et d'autre de la coupure infiniment rapprochés; la substitution que nous cherchons est la même que celle qui donnent les variations de A_1, A_2, A_3 quand y_1 vient en y_2 après avoir décrit le contour C: c'est cette substitution que nous allons chercher. Il nous faut pour cela trouver la variation de

$$\int_{t_0}^{x} \frac{dt}{z}$$

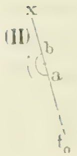
y étant sur le bord gauche puis sur le bord droit de la coupure $t_0 x$.

Si y est sur le bord gauche (fig. I), on devra pour former l'intégrale



$$\int_{t_0}^{x}$$

éviter le point y par un demi cercle ab situé à droite de la coupure. Quand au contraire y sera sur le bord droit (fig. II), on l'évitera par un demi cercle ab situé à gauche de la coupure; la différence des deux intégrales ainsi évaluées s'obtient immédiatement, c'est



$$(\lambda - 1)\left[\int_{t_0}^{x} - \int_{t_0}^{y}\right]$$

ces intégrales ayant leur signification initiale.

En désignant par A'_1, A'_2, A'_3 les nouvelles valeurs de A_1, A_2, A_3, on tire du résultat précédent en se reportant aux valeurs de A_1, A_2, A_3

$$A'_1 = A_1$$
$$A'_2 = A_2 + (\lambda^2 - 1)A_3 - (\lambda - 1)A_1$$
$$A'_3 = A_3 + (\lambda^2 - 1)A_3 - (\lambda - 1)A_1$$

et en posant

$$U = \frac{A'_3}{A'_1}, \quad V = \frac{\lambda^2 A'_2}{A'_1}$$

comme on a posé

$$u = \frac{A_3}{A_1}, \quad v = \frac{\lambda^2 A_2}{A_1}$$

on aura:

$$(S_1) \qquad \begin{aligned} U &= \lambda^2 u - (\lambda - 1) \\ V &= v + (\lambda - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{aligned}$$

En faisant tourner de même le point y autour du point 1, nous obtenons la substitution

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 \\ A'_2 &= A_2 + (\lambda - 1)A_3 - (\lambda - 1)A_1 \\ A'_3 &= \lambda^2 A_3 + (1 - \lambda^2)A_1 \end{aligned}$$

ce qui nous donne:

$$(S_2) \qquad \begin{aligned} U &= \lambda^2 u + (1 - \lambda^2) \\ V &= v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{aligned}$$

Enfin en faisant tourner y autour du point 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 + (1 - \lambda)(- \lambda A_1 + \lambda A_2) \\ A'_2 &= A_2 - (\lambda^2 - 1)(- \lambda A_1 + \lambda A_2) \\ A'_3 &= A_3 \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour u et v la substitution correspondante

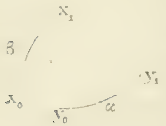
$$(S_3) \qquad \begin{aligned} U &= \frac{u}{- 2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \\ V &= \frac{\lambda v + (\lambda^2 - 1)}{- 2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \end{aligned}$$

Nous venons de trouver les substitutions donnant les valeurs de A_1, A_2 et A_3 quand, x resté constant, y tourne successivement autour des points 0, 1 et x; en combinant ces substitutions de toutes les manières possibles on aura le groupe des substitutions donnant toutes les valeurs de A_1, A_2, A_3 quand, x restant constant, y décrit un contour fermé quelconque.

Si laissant y constant, on fait décrire à x un contour fermé quelconque, le groupe des substitutions correspondantes sera évidemment le même, à cause de la symétrie de x et y.

Nous devons enfin supposer que x et y varient simultanément. Soit

x_0, y_0 un système de valeurs initiales de x et y. Si on donne pour $x = x_0$, $y = y_0$ les valeurs de z, p, q, les équations aux dérivées partielles (ε) [paragraphe 2] détermineront la fonction intégrale z dans le voisinage de $x = x_0$ et $y = y_0$, et en allant ainsi de proche en proche pour une succession de valeurs de x et y, on aura pour un système (x_1, y_1) la valeur de l'intégrale z. On voit de suite que dans le cas où les deux lignes $(x_0 \beta x_1)$ et $(y_0 \alpha y_1)$ ne se coupent pas, au lieu de faire varier simultanément x et y d'après la loi donnée, on peut d'abord, laissant y_0 constant, faire aller x de x_0 en x_1 et ensuite x étant en x_1, faire varier y de y_0 en y_1.



Supposons maintenant que les deux lignes $(x_0 \beta x_1)$ et $(y_0 \alpha y_1)$ aient un seul point commun; on pourra tracer un contour simple C ne comprenant pas les points 0 ou 1 et à l'intérieur duquel soient les deux chemins; il résulte de l'étude faite dans le mémoire cité (paragr. 2) que dans l'intérieur du contour C les équations (ε) ont trois solutions linéairement indépendantes de la forme



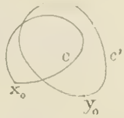
$$F_1(x, y),\ F_2(x, y),\ (x-y)^{\frac{1}{3}} F_3(x, y)$$

F_1, F_2 et F_3 étant des fonctions holomorphes de x et y quand ces variables indépendantes restent à l'intérieur du contour. Partons du système $x = x_0$, $y = y_0$ x, y marchent, suivant une loi quelconque, sur leur chemin respectif et arrivent en x_1 et y_1 (on suppose bien entendu que l'on n'ait jamais $x = y$) et on obtient ainsi la valeur des intégrales précédentes pour $x = x_1$, $y = y_1$,

$$F_1(x_1, y_1),\ F_2(x_1, y_1),\ (x_1 - y_1)^{\frac{1}{3}} F_3(x_1, y_1)$$

le radical cubique ayant une détermination convenable; si au lieu de faire varier x et y simultanément, on fait d'abord varier x, puis ensuite y on pourra obtenir pour ce radical cubique une autre détermination, mais il est clair qu'en faisant tourner x autour de y restant fini en y_1 on pourra ramener la détermination précédente, de telle sorte que l'on peut faire varier x et y séparément et en passer du système de valeurs ainsi trouvé au système cherché en effectuant une substitution du groupe qui vient d'être étudié.

On conclut facilement de la remarque précédente que, quelles que soient les deux courbes C et C' et quelle que soit la loi de succession des deux points x et y, on trouvera les valeurs de A'_1, A'_2 et A'_3 en fonction de A_1, A_2 et A_3 en faisant décrire à x le contour C, y restant en y_0; puis ensuite, x restant en x_0 on fait décrire à y d'abord le contour C', et enfin un contour fermé convenable.



4. On déduit des considérations précédentes le théorème suivant qui est essentiel dans notre étude:

u et v désignant un système de valeurs des rapports $\frac{A_3}{A_1}$ et $\frac{\lambda^2 A_2}{A_1}$, toutes les autres déterminations de u et v sont données en effectuant sur ces grandeurs les substitutions du groupe définies par les trois substitutions élémentaires S_1, S_2 et S_3 que nous avons précédemment obtenues:

$$(S_1)\qquad \begin{cases} U = \lambda^2 u - (\lambda - 1) \\ V = v + (\lambda - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{cases}$$

$$(S_2)\qquad \begin{cases} U = \lambda^2 u + (1 - \lambda^2) \\ V = v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2) \end{cases}$$

$$(S_3)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{u}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \\ V = \dfrac{\lambda v + \lambda^2 - 1}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v} \end{cases}$$

De ce théorème va résulter une conséquence importante. Nous avons vu (paragraphe 1) que pour une des déterminations de u et de v, on a en posant

$$u = u' + iu'' \qquad\qquad v = v' + iv''$$

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

Or en posant pareillement $U = U' + iU''$ et $V = V' + iV''$, on a par l'une et l'autre des substitutions (S_1) et (S_2)

$$2V' + U'^2 + U''^2 = 2v' + u'^2 + u''^2$$

S'il s'agit de la substitution (S_3), on aura, comme le montre un calcul facile

$$2V' + U'^2 + U''^2 = \frac{1}{\operatorname{mod}^2[-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v]}(2v' + u'^2 + u''^2)$$

Nous allons en conclure qu'en désignant par

$$U = \frac{M_1 u + P_1 v + R_1}{M_3 u + P_3 v + R_3}, \quad V = \frac{M_2 u + P_2 v + R_2}{M_3 u + P_3 v + R_3}$$

une substitution quelconque du groupe, on aura:

$$2V' + U'^2 + U''^2 = \frac{1}{\operatorname{mod}^2(M_3 u + P_3 v + R_3)}(2v' + u'^2 + u''^2)$$

Considérons à cet effet les substitutions

$$X = \lambda^2 x - (\lambda - 1)z$$

$$Y = (\lambda - \lambda^2)x + y - (1 - \lambda^2)z$$

$$Z = z$$

puis

$$X = \lambda^2 x + (1 - \lambda^2)$$

$$Y = (1 - \lambda^2)x + y - (1 - \lambda^2)$$

$$Z = z$$

et enfin

$$X = x$$

$$Y = \lambda y + (\lambda^2 - 1)z$$

$$Z = (\lambda^2 - 1)y - 2\lambda z$$

Pour ces trois substitutions on a

(1) $$XX_0 + YZ_0 + Y_0 Z = xx_0 + yz_0 + y_0 z$$

en désignant par x_0, y_0 et z_0 les conjugués de x, y et z. Si maintenant

$$X = M_1 x + P_1 y + R_1 z$$

$$Y = M_2 x + P_2 y + R_2 z$$

$$Z = M_3 x + P_3 y + R_3 z$$

représente une substitution quelconque du groupe dont les trois substitutions précédentes sont les substitutions fondamentales, l'égalité (I) subsistera évidemment, et on en conclut,

$$\frac{X}{Z} \cdot \frac{Y_0}{Z_0} + \frac{Y}{Z} + \frac{Y_0}{Z_0} = \frac{zz_0}{ZZ_0}\left(\frac{x}{z} \cdot \frac{x_0}{z_0} + \frac{y}{z} + \frac{y_0}{z_0}\right)$$

ou bien, comme nous voulions l'établir:

$$2V' + U'^2 + U''^2 = \frac{1}{\operatorname{mod}^2(M_3 u + P_3 v + R_3)}(2v' + u'^2 + u''^2)$$

Par suite pour toutes les déterminations de U et V, on a:

$$2V' + U'^2 + U''^2 < 0$$

Ce point fondamental étant démontré, revenons aux valeurs de A_1, A_2, A_3 définies au paragraphe (1). Nous avons implicitement supposé dans ce qui précède que A_1 n'était pas nul, de telle sorte que u et v définis par les égalités

$$u = \frac{A_3}{A_1}, \quad v = \frac{\lambda^2 A_2}{A_1}$$

avaient des valeurs finies parfaitement déterminées. Or on peut démontrer que pour tout système de valeurs x et y différentes entre elles et distinctes de 0, 1 et ∞, A_1 n'est jamais nul. Reportons nous à cet effet au tableau des périodes normales des intégrales Ω, U et W (paragraphe 1); soient particulièrement considérées les périodes

$$A_1 \quad A_3 \quad A_5 \,.\, A_2 \quad A_4 \quad A_6$$

où

$$A_4 = \lambda A_3, \quad A_5 = -\lambda A_1, \quad A_6 = \lambda^2 A_2$$

c'est un point bien connu dans la théorie des fonctions abéliennes qu'en posant:

$$A_i = \alpha_i + \beta_i\sqrt{-1}$$

on a

$$-\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 - \beta_3\alpha_4 + \beta_4\alpha_3 - \beta_5\alpha_6 + \beta_6\alpha_5 < 0$$

Or si l'on avait $A_1 = 0$, et par suite $A_5 = 0$, l'inégalité se réduirait à:

$$-\beta_3 \alpha_4 + \beta_4 \alpha_3 < 0$$

et comme

$$\alpha_4 + \beta_4 \sqrt{-1} = \lambda(\alpha_3 + \beta_3 \sqrt{-1})$$

on aurait

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_3^2 + \beta_3^2) < 0$$

On ne peut donc supposer que A_1 soit égal à zéro.

5. J'arrive maintenant à l'inversion des rapports des périodes; nous allons montrer que les deux équations:

$$\frac{A_3}{A_1} = u, \quad \frac{\lambda^2 A_2}{A_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v. Nous y parviendrons en cherchant à exprimer x et y à l'aide des fonctions θ de trois variables indépendantes.

Soient

$$U^{(1)}(t, z), \ U^{(2)}(t, z), \ U^{(3)}(t, z)$$

les trois intégrales normales de première espèce correspondant à la relation

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

intégrales dont le tableau des périodes est le tableau (μ) du paragraphe (1), et qui sont prises depuis le point analytique (t_0, z_0) [1] jusqu'à un point variable (t, z). Les équations différentielles abéliennes seront

$$U^{(1)}(t_1, z_1) + U^{(1)}(t_2, z_2) + U^{(1)}(t_3, z_3) = u_1$$
$$U^{(2)}(t_1, z_1) + U^{(2)}(t_2, z_2) + U^{(2)}(t_3, z_3) = u_2$$
$$U^{(3)}(t_1, z_1) + U^{(3)}(t_2, z_2) + U^{(3)}(t_3, z_3) = u_3$$

[1] Nous avons précédemment appelé z_1 la valeur initiale prise pour z quand on a $t = t_0$, nous l'appelons maintenant z_0 afin de pouvoir garder plus de symétrie dans les notations qui suivent.

Nous allons nous servir des équations qui résolvent le problème de l'inversion, en les prenant sous la forme donnée par M. Briot dans sa théorie des fonctions abéliennes (voyez pour les notations Briot, Théorie des fonctions abéliennes, page 157). Je pars de la formule:

$$\prod_{k=1}^{k=p}\left[1+\lambda\frac{\psi(t_k,\ z_k)}{\varphi(t_k,\ z_k)}\right]=\frac{1}{E}\prod_{h=1}^{h=mn}\frac{\theta[U_i-U^{(i)}(\xi'_h,\ \eta'_h)-C_i]}{\theta[u_i-U^{(i)}(\xi_h,\ \eta_h)-C_i]}$$

où E est une constante indépendante des t.

Dans le cas qui nous occupe la fonction θ est formée avec les éléments du tableau (μ) du paragraphe premier. Nous allons prendre $\varphi = t$, $\psi = 1$ et enfin $\lambda = -1$. Dans le second membre nous aurons un produit de trois facteurs comme dans le premier, et on peut écrire:

$$U^{(i)}(\xi_h,\ \eta_h)\equiv U^{(i)}(0,\ 0)$$

$$U^{(i)}(\xi'_h,\ \eta'_h)\equiv U^{(i)}(1,\ 0)$$

Nous déterminerons C_i par la formule (voir l'ouvrage cité, page 147)

$$2C_i\equiv U^{(i)}(0,\ 0)+U^{(i)}(1,\ 0)+U^{(i)}(x,\ 0)+U^{(i)}(y,\ 0)$$

toutes ces congruences ayant lieu par rapport aux périodes des intégrales U. Ceci posé, faisons d'abord dans la formule écrite plus haut

$$t_1 = x \quad \text{et} \quad t_2 = t_3 = \infty$$

Nous aurons dans le premier membre

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

et dans le second membre on devra remplacer u_1, u_2 et u_3 respectivement par

$$U^{(1)}(x,\ 0)+2U^{(1)}(\infty,\ \infty)$$

$$U^{(2)}(x,\ 0)+2U^{(2)}(\infty,\ \infty)$$

$$U^{(3)}(x,\ 0)+2U^{(3)}(\infty,\ \infty)$$

On voit alors que dans le second membre sous le signe θ ne figureront que des différences de deux valeurs de l'intégrale $U^{(i)}(t, z)$ pour $t = 0, 1, x, y$ ou ∞, et ces différences sont des combinaisons linéaires et homogènes des périodes et par conséquent des fonctions rationnelles de u et v; donc dans le second membre le produit $\prod$ est une fonction uniforme de u et v. Il reste à considérer le facteur $\frac{1}{E}$; il suffit pour cela de faire immédiatement dans la formule $t_1 = t_2 = t_3 = \infty$: le premier membre deviendra l'unité et on voit encore comme précédemment que le coefficient de $\frac{1}{E}$ est une fonction uniforme de u et v, il en est alors de même pour E. Ainsi donc $1 - \frac{1}{x}$ est une fonction uniforme de u et v. Je ne m'arrête pas à trouver explicitement les valeurs de x et y en fonction de u et v; la méthode précédente poussée jusqu'au bout donnerait évidemment ces expressions, mais je me suis seulement proposé de montrer *que x et y sont fonctions uniformes de u et v, fonctions qui ne sont définies que pour tout système de valeurs des variables indépendantes u et v, satisfaisant à l'inégalité*

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

en ayant, comme on sait,

$$u = u' + iu'' \quad \text{et} \quad v = v' + iv''$$

Les substitutions (S_1), (S_2) et (S_3) considérées précédemment sont les substitutions fondamentales du groupe (M, P, R) qui laisse invariables ces deux fonctions x et y. Nous poserons

$$x = P(u, v), \quad y = Q(u, v),$$

et on aura

$$P\left(\frac{M_1 u + P_1 v + R_1}{M_3 u + P_3 v + R_3}, \frac{M_2 u + P_2 v + R_2}{M_3 u + P_3 v + R_3}\right) = P(u, v)$$

et

$$Q\left(\frac{M_1 u + P_1 v + R_1}{M_3 u + P_3 v + R_3}, \frac{M_2 u + P_2 v + R_2}{M_3 u + P_3 v + R_3}\right) = Q(u, v)$$

6. Revenons aux substitutions (S_1), (S_2) et (S_3). On peut les écrire en employant trois variables:

$$(S_1) \qquad \begin{cases} X = \lambda^2 x - (\lambda - 1)z \\ Y = (\lambda - \lambda^2)x + y - (1 - \lambda^2)z \\ Z = z \end{cases}$$

$$(S_2) \qquad \begin{cases} X = \lambda^2 x + (1 - \lambda^2) \\ Y = (1 - \lambda^2)x + y - (1 - \lambda^2) \\ Z = z \end{cases}$$

$$(S_3) \qquad \begin{cases} X = x \\ Y = \lambda y + (\lambda^2 - 1)z \\ Z = (\lambda^2 - 1)y - 2\lambda z \end{cases}$$

Ces substitutions transforment en elle-même, comme nous l'avons dit plus haut, la forme quadratique:

$$(\varepsilon) \qquad xx_0 + yz_0 + y_0 z$$

où x_0, y_0, z_0 sont les conjuguées de x, y, z et *cette forme rentre dans le type dont j'ai fait l'étude dans un travail récent.* (1) Elle se ramène immédiatement à la forme canonique, on peut écrire en effet:

$$xx_0 + yz_0 + y_0 z = \frac{1}{2}(2xx_0 + uu_0 - vv_0)$$

en posant

$$u = y + z \quad \text{et} \quad v = y - z$$

Soit

$$X = C_1 x + B_1 y + A_1 z$$
$$Y = C_2 x + B_2 y + A_2 z$$
$$Z = C_3 x + B_3 y + A_3 z$$

une substitution à coefficients entiers de la forme $a + b\lambda$, où a et b sont des entiers réels, qui transforme en elle-même l'expression (ε), on aura les relations:

---

(1) Tome 1er de ce recueil.

$$C_1\gamma_1 + C_2\gamma_3 + C_3\gamma_2 = A_1\beta_1 + A_2\beta_3 + A_3\beta_2 = 1$$

$$(1)\qquad \begin{aligned} A_1\alpha_1 + A_3\alpha_2 + A_2\alpha_3 &= 0 \\ B_1\beta_1 + B_2\beta_3 + B_3\beta_2 &= 0 \\ C_1\alpha_1 + C_2\alpha_3 + C_3\alpha_2 &= 0 \\ C_1\beta_1 + C_2\beta_3 + C_3\beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

les lettres grecques étant, comme d'habitude, les conjuguées des grandes lettres correspondantes.

Les substitutions S_1, S_2, S_3 satisfont aux relations précédentes, mais le groupe dont elles sont les substitutions fondamentales ne forme qu'un sous-groupe dans le groupe général G des substitutions transformant en elle-même la forme (ε).

La substitution de

$$\frac{C_1u + B_1v + A_1}{C_3u + B_3v + A_3}, \quad \frac{C_2u + B_2v + A_2}{C_3u + B_3v + A_3}$$

à u et v équivaut à une transformation des périodes, et par suite

$$P\left(\frac{C_1u + B_1v + A_1}{C_3u + B_3v + A_3}, \frac{C_2u + B_2v + A_2}{C_3u + B_3v + A_3}\right) \text{ et } Q\left(\frac{C_1u + B_1v + A_1}{C_3u + B_3v + A_3}, \frac{C_2u + B_2v + A_2}{C_3u + B_3v + A_3}\right)$$

sont des fonctions algébriques de $P(u, v)$ et $Q(u, v)$.

D'une manière plus générale, au lieu de prendre une substitution (A, B, C) dont les coefficients vérifient les relations (1), considérons les relations

$$C_1\gamma_1 + C_2\gamma_3 + C_3\gamma_2 = A_1\beta_1 + A_2\beta_3 + A_3\beta_2 = k$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} A_1\alpha_1 + A_3\alpha_2 + A_2\alpha_3 &= 0 \\ B_1\beta_1 + B_2\beta_3 + B_3\beta_2 &= 0 \\ C_1\alpha_1 + C_2\alpha_3 + C_3\alpha_2 &= 0 \\ C_1\beta_1 + C_2\beta_3 + C_3\beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

où k est un entier nécessairement réel. Divers problèmes se posent alors sur ces transformations relatives à un nombre k, je me réserve d'y revenir

et je terminerai en montrant que ce nombre k ne peut pas être un entier quelconque; on tire en effet des deux dernières équations (2)

$$\frac{C_1}{\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1} = \frac{C_2}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3} = \frac{C_3}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}$$

Soit s la valeur commune de ces rapports; en substituant ces valeurs de C_1, C_2 et C_3 dans la première des équations (2), on trouve, après diverses réductions

$$s\sigma = \frac{1}{k}$$

σ étant conjugué de s, et l'on conclut de cette égalité que k doit être la norme d'un nombre complexe formé avec les racines cubiques de l'unité, c'est à dire un nombre de la forme $a^2 - ab + b^2$.

Paris, le 1er Février 1883.

ZUR THEORIE DER RAUMCURVEN.

VON

H. VALENTINER

IN KOPENHAGEN.

Einleitung.

Unter den Sätzen, die von ebenen Curven gelten, sind schon seit lange viele solche Sätze bekannt, die von Constantenzählungen abhängen, so z. B. der Satz von der Anzahl von willkürlichen Punkten, durch welche man eine ebene Curve gegebener Ordnung legen kann, der CAYLEY'sche Satz, dass eine Curve n^{ter} Ordnung durch $\frac{(p+q-n-1)(p+q-n-2)}{2}$ Punkte von den Schnittpunkten einer Curve p^{ter} und einer Curve q^{ter} Ordnung gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und viele andere. Von den Raumcurven sind beinahe keine solchen Sätze bekannt. Die wichtigsten sind die, welche HALPHEN (Comptes rendus, tom. 70, p. 380) ohne Beweis veröffentlicht hat, nebst dem Satz von BRILL und NOETHER (Mathematische Annalen, Bd. VII, p. 308) und dem Satz von NOETHER (Mathematische Annalen, Bd. VIII, p. 510).

Erst in der neuesten Zeit haben mehrere Gelehrte sich wieder damit abgegeben, solche Sätze von den Raumcurven zu finden. So hat Professor STURM mehrere solche Sätze gefunden, die in dem »Report of the british association 1881» veröffentlicht sind; und zwei Arbeiten von HALPHEN und NOETHER, die ohne Zweifel auch solche Sätze enthalten, sind dieses Jahr mit dem Steinerschen Preis gekrönt worden.

Die Absicht dieser Arbeit ist auch solche Sätze zu finden. Sie ist anfangs im Jahre 1881 als Doctordissertation(1) an der Kopenhagener

(1) Unter dem Titel: Bidrag til Rumcurvernes Theori.

Universität geschrieben, hier aber bedeutend erweitert und umgearbeitet. Der erste Abschnitt enthält die Sätze, die als Grundlage meiner Untersuchungen über die Raumcurven dienen. Von diesen sind mehrere wohlbekannt, nämlich die Sätze (4), (5), (6), (7) und zum Theil (18), (19). Für den Satz (4) habe ich den Beweis mitgegeben. Dieser Satz giebt an, unter welchen Bedingungen eine Curve, die durch das vollständige Schnittpunktsystem zweier anderen Curven geht, noch jede von diesen Curven in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneiden muss. Der Beweis für diesen Satz ist zuerst von Noether (Mathematische Annalen, Bd. VI, p. 351) geführt. Meinen Beweis habe ich hier mitgegeben, weil er sich nur auf Constantenzählungen stützt, und ich nicht glaube, dass ein solcher Beweis früher geführt ist.

Dagegen habe ich mich begnügt auf die Beweise der Herrn Brill und Noether für die Sätze (5), (6), (7) hinzuweisen, da diese Beweise mir einfach scheinen, und sich nur auf den Satz (4) stützen. Von den nicht vorher bekannten Sätzen findet im Folgenden der Satz (11) viele Anwendungen, und ich will darauf aufmerksam machen, dass der Satz (12) eine Umkehrung des oben angeführten Cayley'schen Satzes enthält.

Der zweite Abschnitt handelt von der Darstellung der Curven. Hier habe ich nach dem Vorgang von Cayley in »Comptes rendus», tom. LIV. p. 55, die Raumcurven als Raumgebilde dargestellt, die Punkt für Punkt ebenen Curven entsprechen, was ich wie Cayley mittelst Kegeln und Monoiden — Flächen m^{ter} Ordnung mit einem $(m-1)$-fachen Punkt — erreiche.

Die Hauptsätze dieses Abschnittes sind:

Wenn man durch die Linien, die man aus einem willkürlichen Punkt α zu der Curve ziehen kann, die diese in zwei Punkten treffen (die Doppelstrahlen), einen Kegel legt, so giebt es immer eine Monoide, deren Scheitel in dem Punkt α liegt, welche den Kegel zum Unterkegel hat und die Curve enthält. (¹)

und

Wenn die Anzahl h der Doppelpunkte einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung grösser als $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ ist, ist jede ebene Curve Projection einer Raumcurve

(¹) Wenn die Gleichung der Monoide $\varphi_m - a\varphi_{m-1} = 0$ ist, nennt man φ_m den Oberkegel, φ_{m-1} den Unterkegel.

n^{ter} Ordnung; ist dagegen $h \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, *findet dieses nur statt, wenn die Doppelpunkte so liegen, dass eine Curve $(n-4)^{ter}$ Ordnung durch einen derselben gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.*

Der dritte Abschnitt behandelt die Lage der Doppelstrahlen, besonders die niedrigste Ordnung, welche ein Kegel haben kann, der durch die aus einem willkürlichen Punkt ausgehenden Doppelstrahlen geht, sammt die Frage, durch wie viele von diesen Linien ein Kegel gehen muss, weil er durch die übrigen geht. Ich will nur hier den einfachsten Satz anführen:

Wenn eine Raumcurve, c_n, $h = d - x$ scheinbare Doppelpunkte hat, kann man immer durch die Doppelstrahlen einen Kegel m^{ter} Ordnung legen, der wenigstens noch x Bedingungen erfüllen kann, wenn

$$d = \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}, \qquad n-2 > m \geq \frac{(n-2)}{2}.$$

Wenn aber die Curven auf Flächen gegebener Ordnung liegen, finden speciellere Sätze statt. Der allgemeine hier angeführte Satz ist auch von Sturm gefunden (siehe den citirten report of the british association).

Der vierte Abschnitt handelt von den Schnittpunkten der Curven und der Flächen. Die Sätze dieses Abschnittes sind wohl die wichtigsten der ganzen Abhandlung. Die Hauptsätze sind:

Wenn man durch eine Raumcurve c_n, die h scheinbare Doppelpunkte hat, zwei Flächen F_p und F_q, p^{ter} und q^{ter} Ordnung, legen kann, ist es mit

$$(p+q-4)n - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) + 1$$

Bedingungen eqvivalent, dass eine Fläche F_{p+q-4}, $(p+q-4)^{ter}$ Ordnung, c_n enthalten soll, wenn F_p und F_q sich noch in einer unauflöslichen Curve c_{pq-n} schneiden. (1)

und:

Unter denselben Bedingungen wie im vorigen Satz, muss F_{p+q-4} durch einen der Schnittpunkte von c_n und c_{pq-n} gehen, weil sie durch die übrigen geht.

Dieser letzte Satz ist dem angeführten Cayley'schen Satz von ebenen Curven analog.

(1) Vgl. Satz (6) von Sturm in dem report, und den oben citirten Satz von Noether.

Auch finden sich in diesem Abschnitt unter andern Resultaten die meisten von den Sätzen, die HALPHEN in »Comptes rendus», tom. LXX veröffentlicht hat.

In dem 5ten Abschnitt finden sich Sätze, die davon handeln, wie viele Bedingungen Raumcurven erfüllen können, die auf verschiedene Weisen definirt sind. Die Resultate dieses Abschnittes sind nicht viele und meistens bekannt; neu sind wohl nur die Resultate meiner Untersuchungen über, wie viele Bedingungen Curven erfüllen können, die auf Flächen gegebener Ordnungen liegen. Ich hoffe aber, dass die Untersuchungen selbst, und die Versuche über die bekannten Resultate hinauszuschreiten nicht ohne Interesse sind. Die meisten Versuche sind auf den geringen Kenntnissen, die man von der Lage der Doppelpunkte der ebenen Curven hat, gescheitert.

Kopenhagen, October 1882.

I.

Einleitende Sätze.

Im Folgenden wird man immer einen Kegel oder eine ebene Curve n^{ter} Ordnung φ_n nennen; es muss dann aus dem Texte gesehen werden, was gemeint wird. Ebenfalls nennt man eine Raumcurve n^{ter} Ordnung c_n, eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n und eine Fläche n^{ter} Ordnung mit einem $(n - 1)$-fachen Punkt M_{n-1}. Die letztgenannte Fläche wird eine Monoide genannt, und der $(n - 1)$-fache Punkt ihr Scheitel. Wenn nichts anders gesagt wird, wird vorausgesetzt, dass alle Kegel und Monoiden ihre Scheitel in demselben Punkte haben. Es werden hier als einleitende Sätze mehrere Sätze angeführt, die zum Theil wohlbekannt sind, weil man sie im Folgenden immer braucht.

1) Wenn eine Curve φ_n durch alle Schnittpunkte α von zwei andern Curven φ_p und φ_q geht, und φ_n noch φ_p in allen ihren Schnittpunkten β mit einer φ_{n-q} schneidet, wird φ_q auch von φ_n in allen ihren Schnittpunkten γ mit einer φ_{n-p} geschnitten, wenn φ_p nicht von zwei Curven φ_{p_1} und φ_{p_2} zusammengesetzt ist, durch deren Schnittpunkte φ_n geht. Es wird vorausgesetzt, dass φ_n weder φ_p noch φ_q enthält.

Dass φ_n durch die st zusammenfallenden Punkte geht, worin φ_p und φ_q in einem Punkt, der s-fach auf φ_p, t-fach auf φ_q ist, einander schneiden, wird sagen, dass φ_n in diesem Punkt sowohl φ_p als φ_q in st zusammenfallenden Punkten schneidet.

Solche Punktgruppen wie α, β, γ werden vollständige Schnittpunktsysteme zweier Curven genannt. α und β bilden zusammen das vollständige Schnittpunktsystem von φ_n und φ_p. Es ist immer gleich $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ Bedingungen, dass φ_n durch α und β gehen soll.

Wir nehmen zuerst an, dass $n \geq p + q$. Man kann dann eine Curve φ_{n-p} durch $q(n-p) - \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_q legen.

Geht nun φ_n durch α und β, und kann man sie nicht durch mehr als $q(n-p) - \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_q gehen lassen, müssen ihre übrigen Schnittpunkte mit φ_q auf einer Curve φ_{n-p} liegen; denn durch so viele Punkte kann man eine Curve φ_{n-p} legen, und φ_{n-p} und φ_p bilden zusammen eine Curve φ_n. Lässt man aber φ_n durch mehr als $q(n-p) - \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_q gehen, muss sie φ_q enthalten. Denn lässt man φ_n durch k weitere Punkte von φ_q gehen, ist sie vollkommen dadurch bestimmt, dass sie durch

$$\frac{n(n+3)}{2} - np + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - q(n-p) + \frac{(q-1)(q-2)}{2} - k =$$

$$\frac{(n-q-p)(n-q-p+3)}{2} + 2 - k$$

willkürlich gegebene Punkte gehen soll. Da aber eine Curve φ_{n-q}, die durch β geht, auch durch eben so viele willkürliche Punkte gelegt werden kann, wird also φ_n in diesem Fall von φ_q und φ_{n-q} zusammengesetzt sein. Ähnlicher Weise sehen wir, dass der Satz auch Gültigkeit hat, wenn $n < p + q$, indem wir zeigen, dass wir eine Curve φ_n, die durch α und β geht, nur durch $\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_q legen können. Der Beweis wird ganz wie im vorigen Fall geführt.

2) Eine Curve φ_n ist nur den Bedingungen unterworfen durch die Schnittpunkte von zwei Curven $\varphi_{n'}$ und φ_q zu gehen ($q < n$), von denen $\varphi_{n'}$ in

einem Punkte a einen s-fachen Punkt hat, und φ_q einen Punkt, der wenigstens s-fach ist. φ_n muss dann auch im Allgemeinen in a einen s-fachen Punkt haben, und wir können zeigen, dass von den $s(s-1)$ ersten dem a und einander benachbarten Punkten [$(s-1)$ auf jedem Zweig von φ_n genommen], durch welche φ_n nicht nothwendig gehen muss, weil sie durch die Schnittpunkte von φ_n und φ_q geht, $\frac{s(s-1)}{2}$ durch die übrigen bestimmt sind. Wir werden die dem a auf φ_n benachbarten s Punkte s_1 nennen, die diesen benachbarten Punkte s_2, u. s. w.

Von s_1 kann man nur einen Punkt willkürlich wählen. φ_n kann nämlich nur durch $\frac{(n-q+1)(n-q+2)}{2}$ willkürlich gewählte Punkte gelegt werden; wenn 2 von den Punkten s_1 willkürlich gewählt wären, würde sich φ_n in φ_q und eine φ_{n-q}, die durch a ginge, auflösen. Denn φ_n könnte nur noch durch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-1$ willkürliche Punkte gelegt werden, und eine φ_{n-q}, die durch a ginge, würde mit φ_q zusammen eine φ_n bilden, die alle gegebenen Bedingungen erfüllte und noch durch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-1$ willkürliche Punkte gelegt werden könnte. Auf eben dieselbe Weise sieht man, dass nur 2 von den Punkten s_2 willkürlich gewählt werden können, wenn die Punkte s_1 bestimmt sind. Denn wählte man 3 Punkte s_2 willkürlich, könnte φ_n nur noch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-3$ Bedingungen erfüllen, und eine φ_{n-q}, von der a ein Doppelpunkt wäre, könnte eben so viele Bedingungen erfüllen, so dass φ_n von einer solchen φ_{n-q} und φ_q zusammengesetzt sein müsste. Es ist auch leicht zu sehen, dass wenn $n-q \geqq 1$, wirklich 2 von den Punkten s_2 willkürlich gewählt werden können; denn sonst müsste φ_n sich in φ_q und eine φ_{n-q}, die einen doppelten Punkt in a hätte, auflösen; dieses ist aber unmöglich, da φ_n noch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-2$ Bedingungen erfüllen kann, φ_{n-q} nur $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2}-3$. Auf dieselbe Weise sieht man, dass man höchstens r Punkte von s_r willkürlich wählen kann, wenn $r < s$, und dass man, wenn $n-q \gtreqless r-1$, wirklich so viele Punkte willkürlich wählen kann.

Man sieht hieraus, dass es höchstens $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen für φ_n ist, durch die $s(s-1)$ dem a benachbarten Punkte auf φ_n zu gehen, wenn

$\varphi_{n'}$ eine bestimmte gegebene Curve ist. Man kann aber leicht zeigen, dass es wirklich so viele Bedingungen sind, wenn $n \gtreqless q + s - 1$. Denn man kann φ_n durch einen willkürlichen Punkt von φ_q gehen lassen. φ_n muss dann φ_q enthalten und ihr übriger Theil eine ganz willkürliche Curve $(n-q)^{ter}$ Ordnung sein. Diese muss aber, um durch die genannten $s(s-1)$ Punkte zu gehen, einen $(s-1)$-fachen Punkt in a haben, und dieses giebt für φ_{n-q} $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen, und also ist es für $\varphi_{n'}$ wenigstens $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen hierdurch zu gehen. Da es nun sowohl höchstens wie wenigstens $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen sind, muss es gerade $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen sein.

3) Zwei Curven φ_m und φ_n sind nur den Bedingungen unterworfen, durch alle Schnittpunkte α von den Curven φ_p und φ_q zu gehen und ausserdem φ_p in den vollständigen Schnittpunktsystemen β und γ zu schneiden. Ein Punkt a_{st} ist s-fach auf φ_p, t-fach auf φ_q, und $s < t$. φ_m und φ_n müssen dann auch einen s-fachen Punkt in a_{st} haben, und es ist dann, wenn $n > p + s - 2$, mit $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent, dass φ_n durch die $s(s-1)$ Punkte S gehen soll, wenn S auf einer gegebenen Curve φ_m liegen, a_{st} benachbart sind, nicht zu α hören und $(s-1)$ von den Punkten S auf jedem Zweig von φ_m liegen.

Nehmen wir an, dass β und γ die vollständigen Schnittpunktsysteme von φ_p und beziehungsweise φ_{m-q} und φ_{n-q} sind, dann bilden φ_n mit φ_{m-q} zusammen, φ_m mit φ_{n-q} zusammen zwei Curven $(m+n-q)^{ter}$ Ordnung, φ_{m+n-q} und φ'_{m+n-q}, die beide das vollständige Schnittpunktsystem $\alpha + \beta + \gamma$ mit φ_p haben. Wenn nun kein Punkt von β oder γ in a_{st} fällt, so dass weder φ_{m-q} noch φ_{n-q} durch a_{st} geht, wissen wir, 2) zufolge, dass es mit $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, dass eine φ_{m+n-q} durch die $s(s-1)$ dem a_{st} auf φ'_{m+n-q} benachbarten Punkte S gehen soll, wenn φ'_{m+n-q} eine gegebene Curve ist, und $m+n-q > p+s-2$; man muss aber immer $m+n-q > p+s-2$ haben, da $m \geq q$, und es gegeben ist, dass $n > p + s - 2$. Daraus folgt aber, da φ_{m-q} und φ_{n-q} nicht durch S gehen, dass es für φ_n höchstens mit $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen

eqvivalent ist durch S zu gehen. Es müssen aber auch wenigstens so viele Bedingungen sein, denn der Beweis am Schlusse von 2) zeigt, dass, wenn alle die Schnittpunkte von φ_n und φ_p bestimmt sind, immer die ersten $s(s-1)$ von den Punkten auf φ_n, die den Schnittpunkten benachbart sind, welche in einen Punkt fallen, der s-fach sowohl auf φ_p als auf φ_n ist, durch $\frac{s(s-1)}{2}$ unter ihnen bestimmt sind. Wenn also nur die Schnittpunkte von φ_n und φ_m zum Theil bestimmt sind, müssen also die genannten Punkte durch wenigstens $\frac{s(s-1)}{2}$ unter ihnen bestimmt sein.

Wenn φ_m oder φ_n die φ_p in Punkten schneiden, die in a_{st} fallen, ist es leicht zu sehen, dass der Satz auch in diesem Fall richtig ist, was aus dem Continuitätsprincip folgt. Übrigens ist es leicht einen directen Beweis zu führen, indem man es ganz wie in den übrigen Fällen thun kann, wenn man nur, was erlaubt ist, φ_p mit einer andern Curve p^{ter} oder q^{ter} Ordnung vertauscht, die durch α geht und von deren übrigen Schnittpunkten mit φ_m keiner in a_{st} fällt.

4) Wie in 3) nennen wir das vollständige Schnittpunktsystem von zwei Curven φ_p und φ_q α, und jeden Punkt, der s-fach auf φ_p, t-fach auf φ_q ist, a_{st}. Eine Curve r^{ter} Ordnung, die durch α geht und in jedem a_{st} einen s- oder t-fachen Punkt hat, je nachdem $s \lesseqgtr t$, und die φ_p noch in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneidet, nennen wir φ_{1r}.

Wir haben dann den folgenden Satz: Wenn eine Curve φ_n durch α geht, und in jedem Punkt a_{st} jeden Zweig einer φ_{1r} in den Punkten schneidet, in welchen dieser auf einmal φ_q und φ_p berührt, und ausserdem in $(s+t-1)$ in a_{st} zusammenfallenden Punkten, muss φ_n ausser in α φ_p in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneiden. Die Curve φ_{1r} kann für jeden Punkt a_{st} eine verschiedene sein, auch ihre Ordnung kann wechseln. Die hier aufgestellten Bedingungen sind zugleich nothwendig dafür, dass φ_n ausser in α φ_p in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneiden soll. In dem Beweis wollen wir der Einfachheit wegen voraussetzen, dass in einem a_{st} kein Zweig von φ_p einen Zweig von φ_q berührt, da es leicht zu sehen ist, dass der Satz immer richtig ist, wenn er in diesem Fall richtig ist. φ_n ist dann nur den Bedingungen unterworfen in jedem a_{st} jeden Zweig einer φ_{1r} in $s+t-1$ zusammenfallenden Punkten zu schneiden. Wir wollen zuerst den Beweis führen, indem wir

$n > p + q - 3$, und so gross annehmen, dass alle die Bedingungen, denen φ_n unterworfen ist, von einander unabhängig sind.

Nehmen wir an, dass $s < t$.

Eine Curve n^{ter} Ordnung, die φ_p in α und noch in einem vollständigen Schnittpunktsystem schneidet, nennen wir φ_{1n}.

Es müssen immer Curven φ_{1r} existiren, deren Zweige von einer φ_{1n} in a_{st} in $s + t - 1$ zusammenfallenden Punkten geschnitten werden. Denn im Allgemeinen hat φ_{1n} in a_{st} einen s-fachen Punkt und berührt jeden Zweig von φ_p $(t - s)$-fach, und da auch jede φ_{1r} dieses thut, muss jede φ_{1r} jeden Zweig von einer φ_{1n} in a_{st} $(t - s)$-fach berühren.

Nach 3) kann aber φ_{1r}, wenn r hoch genug, dazu gebracht werden jeden Zweig von φ_{1n} in a_{st} noch in $(s - 1)$ Punkten zu berühren. Dann schneidet aber φ_{1n} jeden Zweig von φ_{1r} in a_{st} in $(s + t - 1)$ zusammenfallenden Punkten, indem sie einen s-fachen Punkt hat und jeden Zweig $(t - 1)$-fach berührt.

Ebenso sieht man, dass es Curven φ_{1r} giebt, die in a_{st} jeden Zweig von φ_{1n} in $(s + t - 1)$ zusammenfallenden Punkten schneiden, wenn $s > t$. Es ist also hiermit bewiesen, dass, wenn n hoch genug, die Bedingungen nothwendig sind. Wir wollen jetzt zeigen, dass sie zulänglich sind. Wir wollen daher sehen, wie vielen Bedingungen eine φ_n unterworfen ist, wenn sie die im Satze gegebenen Bedingungen erfüllen soll, indem n stets zulänglich gross angenommen wird.

Wir nehmen wieder an, dass in einem a_{st} $s < t$.

In a_{st} soll φ_n erstens einen s-fachen Punkt haben, was mit $\frac{s(s+1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, zweitens soll sie jeden Zweig von φ_p in $(t - s)$ Punkten berühren, was mit $s(t - s)$ Bedingungen eqvivalent ist, und drittens soll sie noch $s(s - 1)$ in a_{st} zusammenfallende Punkte S mit einer φ_{1r} gemein haben, was mit $\frac{s(s-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, da nach 3) $\frac{s(s-1)}{2}$ von den Punkten S beliebig gewählt werden können. Dieses ist im ganzen mit

$$\frac{s(s+1)}{2} + s(t - s) + \frac{s(s-1)}{2} = st$$

Bedingungen eqvivalent.

Ebenso sehen wir, dass es mit st Bedingungen eqvivalent ist, wenn $s > t$, dass φ_n in a_{st} jeden Zweig einer φ_{1r} in $s + t - 1$ zusammenfallenden Punkten schneiden soll.

φ_n ist also im ganzen Σst oder pq Bedingungen unterworfen, oder kann noch $\frac{n(n+3)}{2} - pq$ Bedingungen erfüllen. Eben so viele Bedingungen kann eine φ_{1n} erfüllen, sie kann nämlich durch $(n-q)p - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_p, und, wenn ihre Schnittpunkte mit φ_p bestimmt sind, durch $\frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2}$ willkürliche Punkte gelegt werden, also im ganzen noch

$$(n-q)p - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - qp$$

Bedingungen erfüllen.

Da aber die Curven φ_{1n} alle die Bedingungen erfüllen müssen, welchen die Curven φ_n unterworfen sind, und eine φ_n nicht durch mehrere willkürliche Punkte gelegt werden kann als eine φ_{1n}, müssen die beiden Gruppen von Curven zusammenfallen.

Damit ist also der Satz bewiesen, wenn n zulänglich gross. Man kann aber zeigen, dass der Satz für $(n-1)$ richtig ist, wenn er für n richtig ist. Denn der Satz muss für eine Curve gelten, die von einer φ_{n-1}, welche durch α geht und in jedem a_{st} jeden Zweig von einer φ_{1r} in $(s + t - 1)$ zusammenfallenden Punkten schneidet, und von einer willkürlichen geraden Linie L zusammengesetzt ist. Die Schnittpunkte von dieser zusammengesetzten Curve und φ_p, die nicht in α fallen, müssen also auf einer Curve φ_{n-q} liegen.

Wenn nun $n - q \geq p$, sieht man, dass L, ausser in ihren Schnittpunkten mit φ_p, von φ_{n-q} in einem vollständigen Schnittpunktsystem geschnitten wird, und 1) zufolge müssen dann auch die Schnittpunkte von φ_p und φ_{n-q}, die nicht auf L liegen, ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden und auf einer φ_{n-q-1} liegen, wodurch in diesem Fall der Satz bewiesen ist. Wenn $(n-q) < p$, muss φ_{n-q} L enthalten, und die übrigen Schnittpunkte von φ_p und φ_{n-q} auf einer φ_{n-q-1} liegen, wodurch der Satz ebenfalls in diesem Fall bewiesen ist, so dass wir jetzt bewiesen haben, dass er in allen Fällen gilt.

Aus diesem Satz folgt:

Dass, wenn eine Curve φ_n durch alle Schnittpunkte von zwei Curven φ_p und φ_q geht, und in jedem Punkt a_{st}, der s-fach auf φ_p, t-fach auf φ_q ist, einen $(s+t-1)$-fachen Punkt hat, wird sie noch φ_p in Punkten schneiden, die auf einer φ_{n-q} liegen. (1)

5) Aus 4) kann die allgemeine Residualtheorie abgeleitet werden.

Wenn eine Curve φ_p durch eine Gruppe von Punkten α geht, die auf einer φ_q liegen, und wir annehmen, dass kein Punkt von α Doppelpunkt auf φ_q ist, und φ_q noch die Curve φ_p in einer Punktgruppe β schneidet und einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem Punkt b_t von β hat, der t-fach auf φ_q ist, und wir durch α eine Curve φ_r legen, die gleichfalls einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem b_t hat, und ausser α φ_r in einer Punktgruppe γ schneidet, alsdann wird jede Curve φ'_r, die durch γ geht und ebenfalls einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem b_t hat, φ_q noch in einer Gruppe α' schneiden, durch die man eine Curve φ'_p legen kann, die durch β geht und einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem b_t hat. (2)

6) Wir nehmen im Folgenden an, dass alle Curven φ' $(t-1)$-fache Punkte in gewissen gegebenen t-fachen Punkten b_t von φ_n haben, durch die sie alle gehen, und dass die Punktgruppen im Allgemeinen keinen Doppelpunkt von φ_p enthalten. Wir haben dann das Theorem:

Wenn eine Curve φ'_p die Curve φ_n (ausser in den gegebenen t-fachen Punkten) in den Gruppen α und β schneidet, und β eine feste Gruppe ist, α aber q willkürliche Punkte von φ_n enthalten kann und von Q Punkten besteht, so wird eine Curve φ'_{n-3} durch alle Punkte α gehen, wenn sie durch $Q-q$ willkürliche von diesen Punkten geht. (Siehe Mathematische Annalen, Bd VII, p. 272.)

7) Aus 6) folgt der Riemann-Roch'sche Satz: Wenn φ'_{n-3}, ausser in den Punkten b_t, φ_n in den Punktgruppen α und β schneidet, die beziehungsweise von Q und R Punkten bestehen, von denen q und r Punkte willkürlich gewählt werden können, bestehen zwischen diesen Zahlen folgende Gleichungen:

(1) Vgl. die Abhandlung von Noether, Mathematische Annalen, Bd. VI, p. 341.

(2) Vgl. die Abhandlung von Brill und Noether, Mathemathische Annalen, Bd. VII, p. 273, wo der Beweis sich findet, und die Abhandlung von Noether, Mathematische Annalen, Bd. XV, p. 517.

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{t(t-1)}{2},$$

$$q = p - (R - r) - 1 \qquad r = p - (Q - q) - 1.$$

$\sum \frac{t(t-1)}{2}$ wird über alle Punkte b_t ausgestreckt.

Dieser Satz sagt eigentlich nur aus, dass es eben mit $Q - q$ Bedingungen eqvivalent ist, dass eine Curve φ'_{n-3} durch eine Punktgruppe gehen soll, die von Q Punkten besteht, von denen q willkürlich gewählt werden können. (Siehe Mathematische Annalen, Bd. VII, p. 280.)

Aus diesem Satz folgt, dass es immer mit $\sum \frac{t(t-1)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, dass φ'_{n-3} $(t-1)$-fache Punkte in gewissen t-fachen Punkten von φ_n haben soll. Denn es können nicht mehrere Bedingungen sein, und wären es weniger, würde man eine φ'_{n-3} durch alle Schnittpunkte einer andern φ'_{n-3} mit φ_n gehen lassen können und noch durch mehrere Punkte von φ_n, was unmöglich ist.

Speciell sieht man, dass, wenn φ_n Doppelpunkte hat, können sie niemals so liegen, dass eine φ_{n-3} durch einige unter ihnen gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

8) Zwei Curvenschaaren φ_p und φ_q gehen durch eine Punktgruppe β. Wir setzen voraus, dass $p > q$, und dass wir φ_q noch durch s willkürliche Punkte legen können. Eine willkürliche Curve φ_q trifft eine willkürliche Curve φ_p in einer Gruppe α. Wenn von den Punkten einer solchen Gruppe α immer noch ein Punkt P auf einer geraden Linie liegen muss, weil k Punkte von α dieses thun, muss φ_q die ganze Linie L enthalten, wenn k von ihren Punkten auf L liegen, und also alle die p Punkte, worin L φ_p schneidet, zu α gehören, weil k von diesen Punkten, α_1, dieses thun. Wir können annehmen, dass keiner von den übrigen Schnittpunkten einer geraden Linie und einer willkürlichen Curve φ_p nothwendig zu α gehören muss, wenn nur k_1 von diesen Schnittpunkten zu α gehören, indem $k_1 < k$. Denn sonst könnten wir für k eine kleinere Zahl k_1 setzen, und dann den Beweis führen, indem die Annahme für k_1 statt fände.

Wenn φ_q nicht L enthalten müsste, weil sie durch k der Schnittpunkte von φ_p und L ginge, müsste auch φ_p durch P gehen, weil sie durch β und α_1 ginge, da es sonst nicht immer nothwendig wäre, dass

φ_q durch P gehen müsste, weil sie durch β und α_1 ginge. Aber es ist unmöglich, dass φ_p durch P gehen muss, weil sie durch β und α_1 geht; denn dann müsste eine Curve zusammengesetzt von einer Curve φ_q, die durch β und $k - p + q$ willkürliche Punkte α_1 ginge, und von einer willkürlichen Curve φ_{p-q}, die durch die übrigen $p - q$ Punkte α_1 ginge, auch durch P gehen, und da φ_{p-q} nicht nothwendig durch P gehen müsste, müsste φ_q dieses thun. Dieses streitet aber gegen das, was vorausgesetzt ist, da φ_q dann durch P gehen müsste, weil sie durch eine geringere Zahl der Punkte α_1 als k ginge.

9) Eine Punktgruppe α ist dadurch bestimmt, dass sie auf einer Curve φ_n liegen soll, und dass durch sie eine Curve φ_p geht, die noch φ_p in der festen Punktgruppe β schneidet. Wenn nun alle die Punkte, in welchen eine gerade Linie L_1 φ_n schneidet, zu α gehören müssen, weil k unter ihnen dieses thun, so wird α noch die Punkte enthalten, worin eine neue gerade Linie L_2 φ_n schneidet, wenn noch $(k - 1)$ von diesen zu α gehören.

Wenn α alle die Punkte enthält, in denen eine gerade Linie φ_n schneidet, werden ihre übrigen Punkte eine Gruppe α_1 bilden, die mit β zusammen auf einer Curve φ_{p-1} liegen. Umgekehrt wird jede Curve φ_{p-1}, die durch β geht, eine Gruppe α_1 ausschneiden, die zusammen mit den Punkten, worin eine willkürliche gerade Linie φ_n schneidet, eine Gruppe α bildet.

Wenn wir also eine Curve φ_{p-1} durch β und $(k - 1)$ willkürliche Punkte einer willkürlichen geraden Linie L_2 legen und eine gerade Linie L durch einen der übrigen Schnittpunkte P von L_2 und φ_n, werden L und φ_{p-1} eine Curve φ_p bilden, die eine Gruppe α ausschneidet, welche k von ihren Punkten auf der Linie L_2 hat, und also alle Schnittpunkte von L_2 und von φ_n enthalten muss. Lassen wir nun L nicht mit L_2 zusammenfallen, sieht man, dass φ_{p-1} durch die übrigen $n - k$ Schnittpunkte von φ_n und L_2 gehen muss, und da P willkürlich gewählt ist, auch durch diesen. Daraus sieht man, dass alle Schnittpunkte von L_2 und φ_n zu α_1 gehören müssen, wenn $k - 1$ Punkte von einer Gruppe α_1 auf L_2 liegen, und damit ist der Satz bewiesen.

Da α_1 alle die Punkte enthält, worin eine gerade Linie φ_n schneidet, wenn $k - 1$ von diesen zu α_1 gehören, sieht man, dass sie noch alle die Punkte enthalten muss, worin eine neue gerade Linie L_3 φ_n schneidet, wenn $k - 2$ von diesen Punkten zu α_1 gehören, so dass α die Punkte,

worin drei willkürliche gerade Linien φ_n schneiden, enthalten muss, wenn k Punkte α auf der ersten liegen, $k-1$ auf der zweiten und $k-2$ auf der dritten.

Indem wir immer auf dieselbe Weise fortfahren, werden wir zu dem folgenden Satz geführt. Wenn alle die Punkte, worin eine gerade Linie φ_n schneidet, zu α gehören, weil k von diesen Punkten dazu gehören, wird α alle die Punkte enthalten, worin r gerade Linien φ_n schneiden, wenn k von den Schnittpunkten der ersten Linie, $k-1$ von denen der zweiten, $k-2$ von denen der dritten, ... , $(k-r+1)$ von denen der r^{ten} zu α gehören.

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist es also höchstens mit

$$\frac{k(k+1)}{2}-\frac{(k-r)(k-r+1)}{2}$$

Bedingungen eqvivalent, dass α die Schnittpunkte von r geraden Linien und von φ_n enthalten soll, oder, wie man leicht sieht, wenn so viele von den Schnittpunkten einer willkürlichen Curve mit φ_n zu α gehören, müssen sie alle dieses thun.

10) Wenn q Punkte einer Punktgruppe α, die auf φ_n liegt, willkürlich gewählt werden können, und alle Schnittpunkte einer willkürlichen geraden Linie mit φ_n zu α gehören müssen, weil k von diesen Punkten dieses thun, muss man haben

$$\frac{k(k+1)}{2}>q.$$

Hätte man nämlich $\frac{k(k+1)}{2}\overline{\lesseqgtr} q$, könnte man k willkürliche gerade Linien wählen und k Punkte von α auf der ersten, $(k-1)$ auf der zweiten, ... , 1 auf der letzten liegen lassen, und alle die Punkte, worin diese Linien φ_n schnitten, müssten dann nach 9) zu α gehören. Es ist aber unmöglich, dass alle die Punkte, worin eine willkürliche gerade Linie φ_n schneidet, zu einer Punktgruppe gehören müssen, weil einer unter ihnen, P, dieses thut. Denn dann müssten die Punkte, worin jede Linie durch P φ_n schneidet, zu α gehören, und α folglich alle Punkte von φ_n enthalten, was unmöglich ist. Wir können also nicht $\frac{k(k+1)}{2}\overline{\lesseqgtr} q$ haben.

11) Gegeben sind $mq+k$ Punkte α $(q>k)$, von welchen angenommen wird, dass keiner in einen Doppelpunkt fällt, die auf einer Curve φ_q liegen. Eine Curve n^{ter} Ordnung $(n>m)$, die durch α geht, kann noch durch x willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden:

Welcher ist der grösste Werth, den man x geben kann, und welche Lage hat α in diesem Fall?

Wir wollen zuerst den grössten Werth von x suchen und dann in 12) und 13) versuchen die zweite Frage zu beantworten.

Wir nehmen zuerst an

(A) $$n > m + q - 3.$$

In diesem Fall kann man zeigen, dass man immer

$$x = (n-m)q - \frac{(q-1)(q-2)}{2} - k$$

hat, und dass folglich φ_n durch keinen Punkt von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

φ_n schneidet noch φ_q in einer Punktgruppe β von $nq-mq-k$ Punkten bestehend, und da x von den Punkten β willkürlich gewählt werden können, wird nach 6) eine Curve $(q-3)^{ter}$ Ordnung durch alle die Punkte β gehen, wenn sie durch $nq-mq-k-x$ willkürliche Punkte unter ihnen geht. Da aber die Anzahl der Punkte β grösser als $q(q-3)$ ist, kann keine Curve φ_{q-3} durch β gehen. Man muss daher haben

$$nq - mq - k - x > \frac{q(q-3)}{2}, \qquad x < nq - \frac{q(q-3)}{2} - mq - k.$$

Da es aber für φ_n höchstens mit $mq+k$ Bedingungen eqvivalent ist, dass sie durch α gehen soll, muss man auch haben

$$nq - \frac{(q-1)(q-2)}{2} - mq - k \gtrless x,$$

und man sieht, dass man immer für x den obengenannten Werth bekommen muss. Zweitens nehmen wir an

(B) $$n \leqq m + q - 3.$$

α) Wir nehmen zuerst an, dass $m > q$. Wir nennen die Punktgruppe β, worin φ_n φ_q ausser in α schneidet. β besteht von $(n - m)q - k$ Punkten. Um eine untere Grenze für den höchsten Werth von x zu finden, können wir zuerst annehmen, dass α auf einer Curve φ_{m+1} liege.

Wenn α auf einer φ_{m+1} läge, könnte man φ_n durch die übrigen Schnittpunkte von φ_{m+1} und φ_q gehen lassen, und φ_n würde dann ausser in diesen Punkten φ_q in ihrem vollständigen Schnittpunktsystem mit einer Curve φ_{n-m-1} schneiden. Da φ_{n-m-1} willkürlich gewählt werden könnte, könnten $\frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2}$ von ihren Schnittpunkten mit φ_n willkürlich gewählt werden. Daraus sieht man, dass man

$$x = \frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2} + h$$

setzen kann, indem $h \gtreqless 0$.

Eine Curve φ_{q-3} wird (nach 6)) durch alle Punkte β gehen, wenn sie durch $(n-m)q - k - x = g$ willkürliche Punkte unter ihnen geht, und wird dann noch φ_q in einer Gruppe γ schneiden, die von

$$q(q-3) - rq - q + k = (q - r - 4)q + k$$

Punkten besteht, indem $r = n - m - 1$. Von den Punkten γ können 7) zufolge

$$\frac{q(q-3)}{2} - g = \frac{(q-r-3)(q-r)}{2} + h - (q-k)$$

willkürlich gewählt werden.

Lassen wir jetzt $r+1$ Punkte β und $q - r - 3$ Punkte γ auf einer geraden Linie L liegen, wird φ_{q-3} L enthalten, da L in mehr als $q-3$ Punkten von φ_{q-3} geschnitten wird. Dann müssen aber die beiden übrigen Schnittpunkte von L und φ_q wenigstens zu einer von den zwei Gruppen β oder γ gehören 8) zufolge, indem es leicht zu sehen ist, dass die da aufgestellten Bedingungen hier erfüllt sind. 10) zufolge müssen wir dann haben, dass wenigstens eine von den folgenden Ungleichheiten statt findet

$$(1) \qquad \frac{(r+1)(r+2)}{2} > \frac{r(r+3)}{2} + h, \quad h < 1$$

oder

$$(2)\qquad \frac{(q-r-3)(q-r-2)}{2} > \frac{(q-r-3)(q-r)}{2} - q + k + h, \quad h < r - k + 3.$$

Wenn nun $r - k + 3 \leqq 0$, kann (2) nicht statt finden, da h nicht kleiner als 0 sein kann, und wir müssen dann haben $h < 1$, oder $h = 0$. Wenn $r - k + 3 > 0$, sehen wir (2) zufolge, dass der höchste Werth, den h haben kann, $h = r - k + 2 = n - m - k + 1$ ist.

Die höchsten Werthe, die x haben kann, sind dann,

$$\text{wenn } n \leqq m + k - 1, \; x = \frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2}.$$

und

$$\text{wenn } n \geqq m + k - 1, \; x = \frac{(n-m-1)(n-m+2)}{2} + n - m - k + 1,$$

die man in die Formel

$$x = \frac{(n-m)(n-m+3)}{2} - k + \varepsilon(m + k - n - 1)$$

zusammenfassen kann, wo $\varepsilon = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, je nachdem $n \lesseqgtr m + k - 1$.

Daraus sieht man, dass φ_n höchstens durch

$$\frac{(q+m-n-1)(q+m-n-2)}{2} + \varepsilon(m + k - n - 1)$$

von den Punkten α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

β) Wir nehmen jetzt an dass $m < q$. Man sieht durch dieselben Betrachtungen wie in α), dass die Formel für den höchsten Werth von x ungeändert bleibt.

Die Formel für die höchste Anzahl der Punkte α, durch welche φ_n gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, bleibt ebenfalls ungeändert, wenn $n \geqq q$, während man, wenn $n < q$, sieht, dass diese Anzahl $m(q-n) + \frac{m(m-3)}{2} + \varepsilon(m + k - n - 1)$ ist, wo ε dieselbe Bedeutung wie in α) hat.

12) In dem, was vorhergeht, sind die Formeln für den höchsten Werth von x entwickelt. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Lage eine solche Punktgruppe α haben muss, wenn x diesen höchsten Werth hat.

Zufolge 11) (A) hat x immer denselben Werth, welche Lage auch α hat, wenn $n > m + q - 3$, und wir können hier aus dem Werth von x nicht schliessen, welche Lage α hat. Wir fangen also damit an zu untersuchen, welche Lage α hat, wenn $m + q - 3 \geqq n > k + m - 1$, und wir wollen zeigen, dass wenn x seinen grössten Werth hat, wird eine Curve φ_n, die φ_q in einer Gruppe α schneidet, noch φ_q in einer Gruppe β von $(n - m)q - k$ Punkten schneiden, durch welche man eine Curve $(n - m)^{ter}$ Ordnung legen kann. Wenn wir dieselben Bezeichnungen wie in 11) (B) gebrauchen, sehen wir, dass $\frac{(q - r - 4)(q - r - 1)}{2}$ Punkte der Gruppe γ willkürlich gewählt werden können, indem γ die Punktgruppe ist, in welcher eine φ_{q-3}, die durch β geht, noch φ_q schneidet. Da die Ungleichheit 11) (2) (nicht aber 11) (1)) befriedigt ist, müssen nach 11) (B) und 8) alle die Punkte, in welchen eine willkürliche Gerade L φ_q schneidet, zu γ gehören, wenn $q - r - 3$ unter ihnen dieses thun. Aber dann wird gesehen (dem Schlusse von 9) zufolge), dass γ die Punkte, worin $q - r - 4$ willkürliche gerade Linien φ_q schneiden, enthalten kann, und da eine φ_{q-3} immer durch eine willkürliche Gruppe γ und eine willkürliche Gruppe β geht, sieht man, dass β auf einer Curve $(r + 1)^{ter}$ oder $(n - m)^{ter}$ Ordnung liegt.

Umgekehrt sehen wir, dass, wenn wir eine Curve φ_{n-m} durch k Punkte von φ_q legen, und durch die übrigen Punkte worin φ_{n-m} φ_q schneidet, eine Curve φ_n, φ_n noch φ_q in einer Gruppe α der genannten Beschaffenheit schneidet. Denn φ_{n-m} kann noch durch $\frac{(n - m)(n - m + 3)}{2} - k$ willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden, und der Residualtheorie zufolge, kann eine Curve φ_n, die durch α geht, durch eben so viele willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden.

Hierdurch sieht man, dass es wirklich immer Gruppen α giebt, durch welche man Curven φ_n legen kann, die noch durch x willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden können, wenn x den genannten höchsten Werth hat.

Es ist leicht zu sehen, wenn wir durch k willkürliche Punkte eine Curve φ_p legen können, dass wir uns eine Gruppe α auch dadurch hervorgebracht denken können, dass wir durch die Punkte, in welchen φ_p noch φ_q schneidet, eine Curve φ_{m+p} legen. Hieraus folgt, dass α auf einer

Curve $(n - p)^{ter}$ Ordnung liegt, wenn man durch die k willkürlichen Punkte eine Curve $(n - m - p)^{ter}$ Ordnung legen kann.

Wenn $k = 0$, wird die Gruppe α dadurch hervorgebracht, dass man eine Curve φ_{m+p} durch das vollständige Schnittpunktsystem von φ_q und einer Curve φ_p legt, und α ist dann das vollständige Schnittpunktsystem von φ_q und einer Curve φ_m. Wenn $k = 1$ oder $= 2$ ist, sehen wir, dass man sich eine Gruppe α immer dadurch hervorgebracht denken kann, dass man durch einen oder zwei willkürliche Punkte von φ_q eine gerade Linie L legt, und durch die übrigen Schnittpunkte von L und φ_q eine Curve $(m + 1)^{ter}$ Ordnung.

13) Wenn $n < k + m - 1$, wollen wir zeigen, dass α immer auf einer Curve φ_{m+1} liegt, wenn x seinen höchsten Werth hat, und dass eine Curve φ_n, die durch α geht, φ_q noch in denselben $(q - k)$ Punkten schneiden wird, in denen φ_{m+1} noch φ_q schneidet. Da in diesem Fall nur die Ungleichheit (1) 11) (B) statt findet, sehen wir nach 11) (B) und 8), dass alle die Punkte, worin eine willkürliche gerade Linie L φ_q schneidet, zu β gehören müssen, wenn $r + 1$ unter ihnen dazu gehören; dann aber sieht man, dem Schlusse von 9) zufolge, dass eine Gruppe β die Punkte enthalten kann, worin $r = n - m - 1$ gerade Linien φ_q schneiden, und da β mit α zusammen auf einer Curve n^{ter} Ordnung liegt, dass α auf einer Curve $(m + 1)^{ter}$ Ordnung φ_{m+1} liegt. φ_n muss auch durch die übrigen Schnittpunkte von φ_{m+1} und φ_q gehen; denn von β können nur $\frac{(n - m - 1)(n - m + 2)}{2}$ Punkte willkürlich gewählt werden, und da eine Curve zusammengesetzt von φ_{m+1} und von einer willkürlichen Curve φ_{n-m-1} durch eben so viele willkürliche Punkte von φ_q gelegt werden kann, sieht man, dass die Behauptung richtig ist.

Wenn $n = m + k - 1$, ist $h = 0$, wenn x seinen höchsten Werth hat. Die beiden Ungleichheiten 11) (1) und (2) sind befriedigt. α gehört entweder zu der einen oder der andern Art von den hier genannten Punktgruppen.

14) Wenn man für alle Werthe von n, $n > m$, eine Curve φ_n, die durch α geht, noch durch eine Anzahl willkürlicher Punkte von φ_q, die so gross wie möglich ist, soll legen können, liegt α auf einer Curve φ_{m+1}, die noch φ_q in $(q - k)$ Punkten schneidet, die auf einer geraden Linie liegen.

Wenn $k = 1$ oder $= 2$, ist der Satz schon in 12) bewiesen. Wir nehmen jetzt an, dass $k > 2$. 13) zufolge muss α auf einer Curve $(m + 1)^{ter}$ Ordnung liegen, indem wir $n < m + k - 1$ wählen können. Wenn $k = n - 1$ oder $= n - 2$, ist $n - k$ gleich 1 oder 2, und da wir immer durch so viele Punkte eine gerade Linie legen können, ist der Satz in diesem Fall bewiesen. Wenn $2 < k < n - 2$, giebt es immer, wenn n willkürlich hoch, eine Gruppe β, die aus den $q - k$ Punkten β_1, worin φ_{m+1} noch φ_q schneidet, und aus den Punkten, worin eine willkürliche Curve $(n - m - 1)^{ter}$ Ordnung φ_q schneidet, besteht. Da β aber, wenn $n > m + k - 1$, auf einer Curve $(n - m)^{ter}$ Ordnung liegen soll, muss β_1 auf einer Geraden liegen.

Umgekehrt ist's leicht zu sehen, dass, wenn β_1 auf einer geraden Linie liegt, x immer seinen höchsten Werth hat.

15) Wenn eine Punktgruppe α, die aus $mq + k$ Punkten besteht $(m > q > k)$, eine solche Lage hat, dass eine Curve n^{ter} Ordnung, wenn $n \geq k + m - 1$, durch mehr als $\frac{(q + m - n - 1)(q + m - n - 2)}{2}$ Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, oder so, dass sie, wenn $n < k + m - 1$, wenigstens durch $\frac{(q + m - n - 1)(q + m - n - 2)}{2} + m + k - n - 1$ Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, muss α auf einer Curve q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegen, indem wir annehmen, dass nicht jede Curve von einer gegebenen Ordnung, die wir durch α legen können, eine Curve enthalten muss, die durch einige von den Punkten α geht, ohne durch alle die Punkte α zu gehen.

Wir nehmen zuerst an, dass $n \geq m + k - 1$; φ_n kann dann, ausserdem dass sie durch α geht, wenigstens durch

$$\frac{n(n + 3)}{2} - mq - k + \frac{(m + q - n - 1)(m + q - n - 2)}{2} + 1 =$$

$$= \frac{(n - q)(n - q + 3)}{2} + \frac{(n - m)(n - m + 3)}{2} - k + 2$$

willkürliche Punkte gelegt werden.

Wenn nun φ_n eine Curve enthalten muss, die durch α geht, findet der Satz statt. Denn da φ_n, ausserdem dass sie diese Curve enthalten muss, wenigstens durch $\frac{(n - q)(n - q + 3)}{2}$ willkürliche Punkte gelegt wer-

den kann, muss diese Curve, die ein Theil von φ_n ist, höchstens von q^{ter} Ordnung sein, da φ_n sonst nur durch eine niedrigere Anzahl von willkürlichen Punkten gelegt werden könnte. Wenn φ_n sich nicht auflösen muss, können wir durch α eine neue Curve φ'_n legen, die noch φ_n in $n^2 - mq - k$ Punkten β schneidet, wovon wenigstens

$$\frac{n(n+3)}{2} - mq - k + \frac{(m+q-n-1)(m+q-n-2)}{2}$$

willkürlich gewählt werden können. Eine Curve φ_{n-3} muss dann durch alle die Punkte β gehen, wenn sie höchstens durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(m+q-n-1)(m+q-n-2)}{2}$$

unter ihnen geht. Eine solche Curve wird noch φ_n in einer Punktgruppe γ schneiden, wovon wenigstens $\frac{(m+q-n-1)(m+q-n-2)}{2}$ Punkte willkürlich gewählt werden können.

γ muss 10) zufolge nicht daher alle die Punkte enthalten, worin eine willkürliche gerade Linie L φ_n schneidet, weil $(m+q-n-2)$ von diesen Punkten zu γ gehören. Lässt man also $m+q-n-2$ Punkte γ und $2n-m-q$ Punkte β auf L liegen, muss die Curve φ_{n-3}, die durch γ und β geht, L enthalten, und die 2 Punkte, worin L noch φ_n schneidet, müssen entweder zu β oder zu γ gehören, und da sie nicht zu γ gehören können, weil diese dann nach 8) alle Schnittpunkte von L und φ_n enthalten müsste, müssen sie zu β gehören. β enthält dann nach 8) alle die Punkte, worin eine willkürliche gerade Linie φ_n schneidet, wenn $2n-m-q$ willkürliche Punkte unter diesen zu β gehören. Man kann dann durch α eine Curve φ_{n-1} legen, die wenigstens noch durch

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - mq - k + \frac{(m+q-n)(m+q-n-1)}{2} + 2$$

willkürliche Punkte gelegt werden kann, oder die durch

$$\frac{(m+q-n)(m+q-n-1)}{2} + 2$$

Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

Wenn $n > m + k - 1$, ist also der Satz für n richtig, wenn er für $n - 1$ richtig ist. Aber auch wenn $n \leqq m + k - 1$, können wir zeigen, dass der Satz für n richtig ist, wenn er für $n - 1$ richtig ist. Setzen wir $n = m + k - 1$, sehen wir auf dieselbe Weise wie früher, dass, wenn φ_n durch $\frac{(m + q - n - 1)(m + q - n - 2)}{2} + 1$ Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, muss φ_{n-1} durch

$$\frac{(m + q - n)(m + q - n - 1)}{2} + 2$$

von den Punkten α gehen, weil sie durch die übrigen geht. Auf dieselbe Weise sehen wir, wenn $m + k - 1 > n > m + 1$, und φ_n durch $\frac{(q + m - n - 1)(q + m - n - 2)}{2} + m + k - n - 1$ von den Punkten α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, dass φ_{n-1} durch

$$\frac{(m + q - n)(m + q - n - 1)}{2} + m + k - n$$

von den Punkten α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. Also auch in diesen Fällen ist der Satz für n richtig, wenn er für $(n - 1)$ richtig ist.

Wir wollen also zeigen, dass der Satz für $n = m + 1$ richtig ist, um zu zeigen, dass er in allen Fällen richtig ist.

Wir brauchen daher nur zu zeigen, dass, wenn eine Curve φ_{m+1} wenigstens durch $\frac{(q - 2)(q - 3)}{2} + \varepsilon(k - 3) + 1$ Punkte von α gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, muss α auf einer Curve q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegen, indem $\varepsilon = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, je nachdem $k \gtrless 3$. φ_{m+1} kann noch wenigstens durch $\frac{(m - q + 2)(m - q + 3)}{2} + (\varepsilon - 1)(k - 3)$ willkürliche Punkte gelegt werden. Wie vorher sieht man, dass, wenn φ_{m+1} eine Curve enthalten muss, die durch α geht, diese von niedrigerer Ordnung als der q^{ten} sein muss.

Wenn φ_{m+1} nicht eine solche Curve enthalten muss, schneidet eine neue Curve φ'_{m+1}, die durch α geht, φ_{m+1} in einer Gruppe β, die von $(m + 1)(m - q + 1) + q - k$ Punkten besteht, von welchen wenigstens

$\frac{(m-q+1)(m-q+4)}{2}+(\varepsilon-1)(k-3)$ willkürlich gewählt werden können, und wie früher sieht man, dass diese Gruppe die Punkte, worin eine willkürliche gerade Linie φ_{m+1} schneidet, enthalten muss, wenn $m-q+2$ willkürliche Punkte unter diesen zu β gehören. Es ist also (dem Schlusse von 9) zufolge) höchstens mit $\frac{(m-q+1)(m-q+4)}{2}$ Bedingungen eqvivalent, dass β alle die Punkte enthalten soll, worin $m-q+1$ willkürliche gerade Linien φ_{m+1} schneiden, und da wenigstens eine so grosse Anzahl von den Punkten β willkürlich gewählt werden können, muss α auf einer Curve φ_q liegen.

16) Eine Raumcurve c_m liegt ganz auf einer Fläche F_n, wenn sie so von n Ebenen geschnitten werden kann, dass n ebene Curven, wovon jede jede andere in n Punkten schneidet, durch die nm Schnittpunkte gelegt werden können. Der Satz ist dadurch einleuchtend, dass diese n ebenen Curven zusammen eine vollständige Durchschnittcurve von zwei Flächen n^{ter} Ordnung bilden. (1)

17) Wenn zwei Flächen F_p und F_q einander schneiden, und eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n durch ihre vollständige Durchschnittcurve geht, und F_n die eine Fläche F_p noch in einer vollständigen Durchschnittcurve schneidet, muss sie auch die andere in einer vollständigen Durchschnittcurve schneiden.

Dieser Satz wird wie der analoge von ebenen Curven bewiesen.

18) Wenn c_{pq} die vollständige Durchschnittcurve von zwei Flächen F_p und F_q ist, und wenn eine Fläche F_n, die eine t-fache Curve in jedem Theil c'^s von c_{pq} hat, welcher t-fach auf F_p ist, durch c_{pq} geht, und wenn F_n jedes Netz von F_p längs c'^s $(s-1)$-fach berührt, wenn c'^s s-fach auf φ_q ist, so schneidet F_n noch F_p in einer Curve, durch welche man eine Fläche F_{n-q} legen kann, die eine $(t-1)$-fache Curve in c'^s hat. Schneiden wir c_{pq} mit einer Reihe von r Ebenen P_i, und legen wir durch die Schnittpunkte von den r Ebenen und c_{pq} eine Fläche F_n, die jede P_i in einer Curve f_i schneidet, welche einen t-fachen Punkt in jedem der Schnittpunkte a_i^t von P_i und c'^s hat, und welche in einem solchen Punkte jedes Netz von F_p $(s-1)$-fach berührt, und nehmen wir an, dass P_i die Fläche F_p in φ_i, die Fläche F_q in ψ_i

(1) Siehe eine Abhandlung von mir: Mathematisk Tidsskrift, Kjöbenhavn 1879, p. 24.

schneidet, so können wir zeigen, dass F_n noch die r Curven φ_i in Punkten schneidet, die auf einer Fläche F_{n-q} liegen, die jede Ebene P_i in einer Curve g_i schneidet, die einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem a_i^t hat. Da dieses statt findet, wie gross auch r ist, ist hiermit auch der ursprüngliche Satz bewiesen. Wir können nämlich F_n mit der in dem ursprünglichen Satz erwähnten Fläche zusammenfallen lassen; und da r so gross gemacht werden kann, wie wir wollen, muss eine willkürliche Ebene P die Fläche F_{n-q} in einer Curve g schneiden, die einen $(t-1)$-fachen Punkt in jedem Schnittpunkt von P und c^{ts} hat, und die durch die übrige Durchschnittcurve der F_n mit F_p ausser c_{pq} gehen muss, da sie diese Curve in mehr als $(n-q)^2 p$ Punkten schneiden muss, und die also mit der in dem ursprünglichen Satz erwähnten Fläche F_{n-q} zusammenfallen muss.

Wir fangen damit an n so gross anzunehmen, dass es für F_n und F_{n-q} unabhängige Bedingungen sind, dass ihre Schnittcurven mit den Ebenen P_i t- und $(t-1)$-fache Punkte in den Punkten a_i^t haben sollen, und dass f_i in diesen Punkten die Zweige von φ_i $(s-1)$-fach berühren sollen, so wie auch dass F_n und F_{n-q} nicht dieser Bedingungen wegen durch einen Punkt ausser den gegebenen gehen muss. Dass wir wirklich n so gross annehmen können, ist leicht zu sehen, wenn wir uns F_n und F_{n-q} von Ebenen zusammengesetzt denken, von denen beziehungsweise $t+s-1$ und $t-1$ durch die Punkte a_i^t gehen.

F_n kann durch

$$np - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum\left(\frac{t(t+1)}{2} + t(s-1)\right) =$$

$$= p(n-q) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum\frac{t(t-1)}{2}$$

willkürliche Punkte von φ_1 gelegt werden, ohne dass sie φ_1 enthalten muss. Wenn die Schnittpunkte von F_n und φ_1 bestimmt sind, und keiner von ihnen in einen Schnittpunkt von φ_1 und φ_2 fällt, kann F_n durch

$$p(n-q-1) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum\frac{t(t-1)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte von φ_2 gelegt werden, ohne dass sie φ_2 enthalten muss.

Die Linie L_{12}, worin P_1 und P_2 einander schneiden, bildet nämlich zusammen mit φ_2 eine Curve $(p+1)^{ter}$ Ordnung. Legen wir dann eine

Curve f_2 n^{ter} Ordnung durch die n Punkte, in welchen f_1 P_2 schneidet, kann diese noch durch $np - \frac{p(p-1)}{2}$ willkürliche Punkte von φ_2 gelegt werden, indem man f_2 im ganzen durch $n(p+1) - \frac{p(p-1)}{2}$ willkürliche Punkte einer von L_{12} und φ_2 zusammengesetzten Curve legen kann. Soll nun f_2 t-fache Punkte in den Punkten a_2^t haben und die Zweige von φ_2 in solchen Punkten $(s-1)$-fach berühren, kann sie noch durch

$$p(n-q-1) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum \frac{t(t-1)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte von φ_2 gelegt werden. Hieraus sieht man aber, dass F_n durch ebenso viele willkürliche Punkte von φ_2 gelegt werden kann, da zwei Curven n^{ter} Ordnung, die einander in n Punkten schneiden, die vollständige Durchschnittcurve von ihren Ebenen und einer Fläche F_n bilden.

Auf dieselbe Weise wird gesehen, dass wir F_n durch

$$p(n-q-r+1) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum \frac{t(t-1)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte von φ_r legen können, wenn die Schnittpunkte von F_n und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_{r-1}$ bestimmt sind. Nennen wir die Durchschnittlinie von P_1 und P_r L_{1r}. Die Curven $f_1, f_2 \ldots f_{r-1}$ bilden zusammen die vollständige Durchschnittcurve von den Ebenen $P_1, P_2 \ldots P_{r-1}$ und einer Fläche F_n, also bilden ihre Schnittpunkte mit einer Ebene P_r ein vollständiges Schnittpunktsystem α einer Curve n^{ter} und einer Curve $(r-1)^{ter}$ Ordnung, und es ist für eine Curve f_r, die n^{ter} Ordnung ist, mit $n(r-1) - \frac{(r-2)(r-3)}{2}$ Bedingungen eqvivalent, durch α gehen zu sollen.

Nun bilden $L_{1r}, L_{2r} \ldots L_{(r-1)r}$ mit φ_r zusammen eine Curve $(p+r-1)^{ter}$ Ordnung, und da man f_r im Ganzen durch

$$n(p+r-1) - \frac{(p+r-2)(p+r-3)}{2}$$

willkürliche Punkte einer solchen Curve legen kann, kann also f_r durch

$$np - \frac{(p+r-2)(p+r-3)}{2} + \frac{(r-2)(r-3)}{2} = (n-r)p - \frac{p(p-5)}{2}$$

willkürliche Punkte von φ_r gelegt werden, ausserdem dass sie durch das Schnittpunktsystem α geht, oder sie kann, ausserdem dass sie t-fache Punkte in den Punkten a_i^t hat und die Zweige von φ_r in diesen Punkten $(s-1)$-fach berührt, noch durch

$$p(n-q-r+1) - \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \sum \frac{t(t-1)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte von φ_r gelegt werden. r Curven n^{ter} Ordnung, von welchen jede jede andere in n Punkten trifft, bilden aber zusammen eine vollständige Durchschnittcurve von einer Fläche F_n und von den Ebenen dieser Curven, und es ist daher einleuchtend, dass man F_n durch die erwähnte Anzahl von willkürlichen Punkten gehen lassen kann.

Auf dieselbe Weise wird gesehen, dass man F_{n-q} durch eine eben so grosse Anzahl willkürlicher Punkte von jeder Curve $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ gehen lassen kann, und da F_{n-q} mit F_q zusammen eine Fläche F_n bildet, sieht man, dass F_{n-q} durch alle die Schnittpunkte von F_n und $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ gehen muss, die nicht in die Schnittpunkte von F_q und von diesen Curven fallen, wenn man F_n und F_{n-q} durch dieselben willkürlichen Punkte dieser Curven gehen lässt. Wenn die Schnittpunkte von F_{n-q} und von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ bestimmt sind, kann man noch F_{n-q} durch

$$b_{n-q} = \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{6} - \left((n-q)rp - \frac{rp(r+p-4)}{2}\right)$$

willkürliche Punkte gehen lassen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass der Satz für $(n-1)$ richtig ist, wenn er für n richtig ist, vorausgesetzt, dass es eine Fläche F_{n-1} giebt, die die in dem Hauptsatz angegebenen Bedingungen befriedigt. F_{n-1} wird immer mit einer willkürlichen Ebene P zusammen eine Fläche F_n bilden, und der Satz wird also für diese zusammengesetzte Fläche richtig sein; wir können aber zeigen, dass wir immer für F_{n-q} eine Fläche wählen können, die von P und einer Fläche F_{n-q-1} zusammengesetzt ist. Wir nehmen

immer an, dass $r > p$, und fangen damit an r so gross anzunehmen, dass wir, wie wir eben gethan haben, den Satz direct beweisen können, und dass F_{n-q} noch

$$b_{\ } = \frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{6} - \left((n-q)rp - \frac{rp(r+p-4)}{2}\right)$$

Bedingungen erfüllen kann, ausserdem dass ihre Schnittpunkte mit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ bestimmt sind, und dass $n-q > r+p-3$. F_{n-q} muss dann P enthalten, wenn sie durch $\frac{(n-q)(n-q+3)}{2} - pr + 1$ willkürliche Punkte β von P geht. Denn F_{n-q} schneidet P, ausser in den Punkten β, in den rp Punkten, in welchen P $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ schneidet, und da es mit rp Bedingungen eqvivalent ist, dass eine Fläche höherer als $(r+p-3)^{ter}$ Ordnung hierdurch gehen soll, wird also F_{n-q} P enthalten und noch durch

$$\frac{(n-q)(n-q+1)(n-q+2)}{6} - \left((n-q-1)rp - \frac{rp(r+p-4)}{2}\right)$$

willkürliche Punkte gelegt werden können. Durch b_{n-q} willkürliche Punkte kann man also immer eine Fläche F_{n-q} legen, wenn es eine Fläche F_n giebt, die die in dem Hauptsatze genannten Bedingungen erfüllt, und $n-q \geqq r+p-3$.

Wenn $n = p+q+r-3$, kann F_{n-q} noch

$$\frac{(r+p-2)(r+p-1)(r+p)}{6} - \left((r+p-3)rp - \frac{rp(r+p-4)}{2}\right)$$

Bedingungen erfüllen. F_{n-q} wird dann eine willkürliche Ebene P enthalten, wenn sie durch $\frac{(r+p-3)(r+p)}{2} + 1 - rp + 1$ willkürliche Punkte derselben geht, indem es mit $rp - 1$ Bedingungen eqvivalent ist, dass eine Fläche $(r+p-3)^{ter}$ Ordnung durch die Schnittpunkte von P und von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ gehen soll. In diesem Fall wird also F_{n-q-1} noch

$$\frac{(p+r-3)(p+r-2)(p+r-1)}{6} - \left((p+r-4)rp - \frac{rp(p+r-4)}{2}\right) - 1$$

Bedingungen erfüllen können.

Indem wir auf dieselbe Weise fortfahren, sehen wir durch Induction, dass F_{n-q} wenigstens

$$\frac{(p+r-k+1)(p+r-k+2)(p+r-k+3)}{6} - \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6}$$
$$-\left((p+r-k)rp - \frac{rp(p+r-4)}{2}\right)$$

Bedingungen erfüllen kann, wenn $n = p + q + r - k > r + q$. Denn diese Formel ist für $(n-1)$ richtig, wenn sie für n richtig ist, da F_{n-q} P enthalten wird, wenn sie durch

$$\frac{(n-q)(n-q+3)}{2} - rp + \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte derselben geht. Wenn $n = r + q$, sehen wir dass F_{n-q} noch

$$\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6} - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{6} - \left(r^2p - \frac{rp(p+r-4)}{2}\right) -$$
$$= \frac{(r-p+1)(r-p+2)(r-p+3)}{6} + 1$$

Bedingungen erfüllen kann.

F_{n-q} wird in diesem Fall P enthalten, wenn sie durch

$$\frac{(r-p+1)(r-p+2)}{2} + 1$$

willkürliche Punkte derselben geht, und F_{n-q-1} muss in diesem Fall noch

$$\frac{(r-p)(r-p+1)(r-p+2)}{6}$$

Bedingungen erfüllen können.

Wenn $n = r + q - 1$, muss F_{n-q} die Ebene P enthalten, wenn sie durch $\frac{(r-p)(r-p+1)}{2}$ willkürliche Punkte derselben geht, und F_{n-q-1} wird dann noch

$$\frac{(r-p-1)(r-p)(r-p+1)}{6}$$

willkürliche Bedingungen erfüllen können.

Wie vorher können wir dann durch Induction zeigen, dass F_{n-q} wenigstens

$$\frac{(r-p-k+1)(r-p-k+2)(r-p-k+3)}{6}$$

Bedingungen erfüllen kann, wenn $n = r + q - k \geqq q + p$, indem F_{n-q} P enthalten muss, wenn sie durch $\frac{(r-p-k+1)(r-p-k+2)}{2}$ willkürliche Punkte derselben geht.

Wenn $n < q + p$, und F_n von einer Ebene P und einer Fläche F_{n-1} zusammengesetzt ist, muss F_{n-q} immer diese Ebene enthalten. Der Satz ist jetzt in allen Fällen bewiesen, indem es, wenn $n \geqq p + q$, von der Anzahl der Bedingungen, die F_{n-q} noch erfüllen kann, gesehen wird, dass sie nicht F_p enthalten muss, und sie es nicht thun kann, wenn $n < p + q$, indem in diesem Fall F_{n-q} von niedrigerer Ordnung als F_p ist.

Aus dem Hauptsatz folgt, dass, wenn eine Fläche F_n eine andere Fläche F_p in einer vollständigen Durchschnittcurve c_{pq} schneidet, wovon kein Theil auf F_p doppelt ist, muss der übrige Theil der Durchschnittcurve von F_p und F_n auch eine vollständige Durchschnittcurve sein. Wenn $n > p + q - 4$, ist es daher mit

$$npq - \frac{pq(p+q-4)}{2} = npq - \frac{(pq-1)(pq-2)}{2} + h + 1$$

Bedingungen eqvivalent, dass F_n c_{pq} enthalten soll, indem h die Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten auf c_{pq} ist, während es, wenn $n \overline{\overline{<}} p + q - 4$ mit

$$npq - \frac{pq(p+q-4)}{2} + \frac{(p+q-n-1)(p+q-n-2)(p+q-n-3)}{6}$$

Bedingungen eqvivalent ist.

Es wird gesehen, dass die Formeln für

$$n = \left| \begin{array}{l} p+q-1 \\ p+q-2 \\ p+q-3 \end{array} \right.$$

zusammenfallen.

19) Wir nehmen an, dass zwei Flächen F_n und F_p einander in den Curven c_r und c_{pn-r} schneiden, und dass kein Theil von c_r auf F_n mehr-

fach ist, während jeder Theil c^t von c_{pn-r}, der auf F_n t-fach ist, auf F_p $(t-1)$-fach ist, (wenn $t > 1$). Ferner nehmen wir an, dass alle die Flächen, von welchen im Folgenden die Rede ist, ebenfalls $(t-1)$-fache Curven in c^t haben.

Wenn wir eine Fläche F_q durch c_r legen, und diese noch F_n in der Curve c_{qn-r} schneidet, können wir durch jede Curve c'_r, worin eine neue Fläche F'_q durch c_{qn-r} F_n schneidet, auch eine Fläche F'_p legen, die durch c_{pn-r} geht.

F'_q bildet nämlich mit F_p zusammen eine Fläche F_{p+q}, die durch die Durchschnittcurve von F_q und F_n geht, und eine $(2t-2)$-fache Curve in jedem Theil von dieser hat, der t-fach auf F_n, $(t-1)$-fach auf F_q ist, und also muss der übrige Theil der Durchschnittcurve von F_{p+q} und F_n, 18) zufolge, auf einer Fläche F'_p liegen.

II.

Darstellung der Raumcurven als Schnittcurven von Kegeln und Monoiden.

20) Eine Raumcurve n^{ter} Ordnung c_n kann immer dazu gebracht werden, dass sie Punkt für Punkt einer ebenen Curve entspricht. Wenn man nämlich einen Kegel φ_n, der seinen Scheitel in einem willkürlichen Punkt hat, durch c_n legt, und man φ_n mit einer Ebene P schneidet, kann man sich denken, dass jeder Punkt p der Raumcurve dem Punkt p' der Ebene entspricht, in welchem die Erzeugende von φ_n durch p P schneidet. Nehmen wir an, dass die Gleichung der Ebene $x_4 = 0$ ist, indem wir ein allgemeines 4-Plan-Coordinatensystem brauchen, und dass der Scheitel des Kegels in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ liegt, so ist die Raumcurve durch

$$x_4 = \frac{\varphi_m}{\varphi_{m-1}} \quad \text{und} \quad \varphi_n = 0$$

bestimmt, indem wir annehmen, dass φ_m, φ_{m-1}, φ_n homogene Functionen beziehungsweise der Ordnungen m, $m-1$ und n von x_1, x_2, x_3 sind.

$\varphi_n = 0$ ist die Gleichung des Kegels, der durch c_n geht, und $x_4 = \frac{\varphi_m}{\varphi_{m-1}}$ giebt an, dass jedem Punkt $x_1 : x_2 : x_3$, worin eine Erzeugende von

φ_n $x_4 = 0$ schneidet, ein Punkt der Raumcurve entspricht, indem dieser bestimmt ist, wenn wir die $x_1 : x_2 : x_3$ entsprechende Coordinate x_4 bestimmt haben. Man sieht auch, dass x_4 eine rationale Function von $x_1 : x_2 : x_3$ sein muss, da sonst jedem Punkt $x_1 : x_2 : x_3$ mehr als ein Punkt der Raumcurve entsprechen würde. Man kann also auch die Raumcurve als Durchschnittcurve eines Kegels n^{ter} Ordnung, und einer Fläche M_{m-1} mit einem $(m - 1)$-fachen Punkt in dem Scheitel des Kegels auffassen. Diese Fläche $M_{m-1}(\varphi_m - x_4\varphi_{m-1} = 0)$ wird wie vorher gesagt eine Monoide genannt, $\varphi_m = 0$ (oder kürzer φ_m) wird der Oberkegel von M_{m-1} genannt, $\varphi_{m-1} = 0 (\varphi_{m-1})$ der Unterkegel. (¹) Man sieht, dass im Allgemeinen ein Kegel und eine Monoide mit den Scheiteln in demselben Punkt α einander nicht in einer Raumcurve n^{ter} Ordnung, sondern in einer Raumcurve mn^{ter} Ordnung mit einem $n(m - 1)$-fachen Punkt in α schneiden. Die Flächen φ_n und M_{m-1} müssen also speciell sein oder wenigstens in besonderen Beziehungen zu einander stehen. Da der Scheitel α willkürlich gewählt werden kann, können wir annehmen, dass c_n nicht durch α geht. Die vollständige Durchschnittcurve von φ_n und M_{m-1} muss sich dann in c_n und in eine Curve $c_{n(m-1)}$ mit einem $n(m - 1)$-fachen Punkt in α auflösen. Dann muss aber c_n aus $n(m - 1)$ geraden Linien l bestehen. Denn jede Ebene, die durch α und noch einen Punkt von $c_{n(m-1)}$ geht, muss einen Theil dieser Curve ganz enthalten, da $c_{n(m-1)}$ von der Ebene in mehr als $n(m - 1)$ Punkten geschnitten wird. Da x_4 für die Punkte der Linien l unbestimmt sein muss, hat man für Punkte dieser Linien $\varphi_m = 0$, $\varphi_{m-1} = 0$:

φ_{m-1} und φ_n schneiden einander eben in $n(m - 1)$ geraden Linien, und man muss also, wenn $\varphi_n = 0$, $\varphi_{m-1} = 0$, auch $\varphi_m = 0$ haben. Es wird dann gesehen, dass φ_n Doppellinien haben muss. Wäre nämlich $m < n$, müssten sonst $\varphi_m = 0$ und $\varphi_{m-1} = 0$ einander in mehr als $m(m-1)$ Linien schneiden, und wäre $m > n$, hätte man

$$\varphi_n a + \varphi_{m-1} b \equiv \varphi_m,$$

indem a eine ganze homogene Function $(m - n)^{ter}$ Ordnung von $x_1 : x_2 : x_3$, b eine solche Function 1ster Ordnung sind, und man könnte dann die Gleichung der Monoide

(¹) Siehe Cayley: Comptes rendus, tom. LIV, p. 55. Considérations générales sur les courbes en espace.

$$(x_4 - b)\varphi_m = \varphi_n a$$

schreiben, welche zeigt, dass dann die Curve eben sein müsste.

Die Monoide muss alle die geraden Linien enthalten, die durch α gehen und c_n zweimal schneiden, (die Doppelstrahlen), weil die Monoide diese in $(m + 1)$ Punkten schneiden muss. Wenn sich keine wirkliche Doppelpunkte auf c_n finden, sieht man, dass die Monoide durch alle Doppellinien von φ_n gehen muss. Dagegen braucht die Monoide nicht durch die Doppellinien von φ_n zu gehen, die durch wirkliche Doppelpunkte von c_n gehen, wenn diese Doppelpunkte nicht höherer Ordnung als der zweiten sind. In dieser Abhandlung soll aber nur auf solche Curven Rüchsicht genommen werden, die keine solche Specialiteten darbieten.

21) Wenn φ_n die Projection einer Raumcurve ist, können die Doppelpunkte von φ_n entweder Projectionen von wirklichen oder scheinbaren Doppelpunkten sein. Wenn c_n die Durchschnittcurve von M_{m-1} und einem Kegel φ_n ist, der durch die ebene Curve φ_n geht, wollen wir untersuchen, wann das eine und wann das andere der Fall ist. Wir nehmen an, dass keine Linie auf φ_n mehr als doppelt ist, und dass die Tangentenebenen in einer solchen Linie nicht zusammenfallen.

Nehmen wir an, dass M_{m-1} in einer Doppellinie D von φ_n die Netze von φ_n in p und q zusammenfallenden Linien schneidet, so müssen sowohl der Ober- wie der Unterkegel diese Netze in D in eben so vielen zusammenfallenden Linien schneiden.

Jeder Kegel m^{ter} Ordnung φ'_m, der durch alle die Durchschnittlinien von φ_m und φ_{m-1} geht, muss M_{m-1} in einer ebenen Curve schneiden; denn φ'_m schneidet M_{m-1} in allen ihren Durchschnittlinien mit φ_{m-1}, und es kann durch einen willkürlichen ebenen Schnitt von M_{m-1} ein φ'_m gelegt werden, da φ'_m noch drei Bedingungen erfüllen kann. Soll nun c_n einen wirklichen Doppelpunkt d haben, muss jede Ebene P, die hierdurch geht, c_n in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, oder die Durchschnittcurve von P und M_{m-1} muss die beiden Netze von φ_n in d p-mal und q-mal berühren, und also muss ein φ'_m, der durch einen solchen ebenen Schnitt geht, dasselbe thun.

Da nun die Sätze von den ebenen Curven auf Kegel mit gemeinschaftlichem Scheitel unmittelbar übertragen werden können, sieht man, 2) zu-

folge, dass die auf einer φ'_m D benachbarten Linien durch einen unter ihnen bestimmt sind. Es giebt also im Allgemeinen kein φ'_m, der in D die beiden Netze von φ_n p- und q-fach berührt, so dass, wenn keine besonderen Bedingungen statt finden, D ein Doppelstrahl zu c_n ist. Die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass c_n auf D einen wirklichen Doppelpunkt d haben soll, ist, dass es einen Kegel φ'_m giebt, der in D die beiden Netze von φ_n p- und q-fach berührt. Dann müssen nämlich alle φ'_m, die z. B. das eine Netz von φ_n p-fach berühren, auch das andere q-fach berühren. Alle diese φ'_m müssen M_{m-1} in ebenen Curven schneiden, die die Netze von φ_n in p und q Punkten in D berühren, und deren Ebenen also c_n in zwei in D fallenden Punkten d schneiden, und da diese Schaar von φ'_m doppelt unendlich ist, muss c_n einen wirklichen Doppelpunkt in d haben.

Wenn D nur eine einfache Linie auf M_{m-1} ist, und c_n einen wirklichen Doppelpunkt haben soll, muss es ein φ'_m geben, der in D eine Doppellinie hat. Dazu ist aber nur nothwendig und zulänglich, dass φ_{m-1} alle φ'_m in zwei in D zusammenfallenden Linien schneidet. Dass dieses nothwendig ist, sieht man daraus, dass der φ'_m, der eine Doppellinie in D hat, φ_{m-1} in zwei in D zusammenfallenden Linien schneiden muss, und dass also alle φ'_m dieses thun müssen. Dass die Bedingung zulänglich ist, sieht man daraus, dass alle φ'_m die Tangentenebene P zu φ_{m-1} in D berühren müssen. Da wenigstens die eine Tangentenebene P_1 des φ_n in D von P verschieden sein muss, muss ein φ'_m, der auch P_1 berührt, eine Doppellinie in D haben.

Wenn D einfach auf M_{m-1} ist, und wenn c_n einen wirklichen Doppelpunkt auf D haben soll, ist es leicht zu sehen, dass man auch die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür dadurch ausdrücken kann, dass M_{m-1} einen Doppelpunkt auf D haben soll.

Übrigens lassen sich die angestellten Betrachtungen mit geringen Modificationen auf den Fall anwenden, wo D eine Rückkehrlinie von φ_n ist.

22) In dem, was vorhergeht, haben wir gesehen, dass man sich jede Raumcurve c_n als Durchschnittcurve von einer Monoide und einem Kegel denken kann. Wir nehmen an, dass

$$M_{m-1} \equiv \varphi_{m-1}\, x_4 - \varphi_m = 0$$

die Gleichung der Monoide ist, indem φ_m und φ_{m-1} dieselben Bedeutungen

wie in 20) haben. Legen wir jetzt einen neuen Kegel φ_{m_1-1} durch die Doppellinien D von φ_n, durch welche φ_{m-1} geht, so ist es erlaubt anzunehmen, dass diese Linien nicht doppelt auf φ_{m_1-1} sind, indem es leicht zu sehen ist, dass es solche φ_{m_1-1} giebt, wenn m_1 hoch genug ist.

Die Kegel φ_m und φ_{m_1-1} bilden zusammen einen Kegel φ_{m+m_1-1}, der in jeder D jedes Netz von φ_n in einer Linie mehr schneidet als φ_{m-1}. Da D nur doppelt auf φ_n ist, sieht man, 4) zufolge, dass φ_{m+m_1-1} noch φ_n in Linien schneidet, die auf einem Kegel φ_{m_1} liegen.

Wir müssen dann haben

$$\varphi_m\varphi_{m_1-1} + a\varphi_{m_1}\varphi_{m-1} \equiv \varphi_n u$$

wo a eine Constante ist, u eine ganze homogene Function $(m+m_1-n-1)^{ter}$ Ordnung von x_1, x_2, x_3; denn jeder Kegel des Bundes

$$\varphi_m\varphi_{m_1-1} + \lambda\varphi_{m-1}\varphi_{m_1} = 0,$$

das gebildet wird durch Variation von λ, schneidet nämlich φ_n in denselben $(m+m_1-1)n$ Linien, und bestimmen wir λ so, dass der entsprechende Kegel durch eine willkürliche Erzeugende von φ_n geht, muss dieser Kegel φ_n enthalten. Hieraus folgt aber, dass

$$\varphi_{m_1-1}(\varphi_{m-1}x_4 - \varphi_m) \equiv \varphi_{m_1-1}\varphi_{m-1}x_4 - \varphi_n u + a\varphi_{m_1}\varphi_{m-1} = 0.$$

Und da dieses die Gleichung einer Fläche ist, die durch c_n geht, und die φ_n in derselben Durchschnittcurve wie

$$\varphi_{m-1}(\varphi_{m_1-1}x_4 + a\varphi_{m_1}) = 0$$

schneidet, und da φ_{m-1} nicht c_n enthalten kann, muss

$$\varphi_{m_1-1}x_4 + a\varphi_{m_1} = 0$$

dieses thun.

Wir nehmen jetzt an, dass wir einen neuen Kegel φ_{m_2-1} haben, der nur durch die Doppellinien h, die Doppelstrahlen zu c_n sind, zu gehen braucht.

φ_{m_2-1} und φ_{m_1} bilden einen Kegel $\varphi_{m_1+m_2-1}$, der durch die Durchschnittcurve von φ_n und φ_{m_1-1} geht, in jeder Linie h eine Doppellinie hat und in den übrigen Doppellinien φ_{m_1-1} in denselben Linien wie φ_n schneidet

(dem Schlusse von 21) zufolge). $\varphi_{m_1+m_2-1}$ muss dann noch φ_n in Linien schneiden, die auf einem φ_{m_2} liegen, und man hat wie vorher

$$\varphi_{m_1}\varphi_{m_2-1} + a_1\varphi_{m_1-1}\varphi_{m_2} \equiv u_1\varphi_n,$$

wo a_1 und u_1 ähnliche Bedeutungen wie a und u haben, und ebenso dass c_n auf einer Monoide liegen muss, deren Gleichung

$$\varphi_{m_2-1}x_4 - aa_1\varphi_{m_2} = 0$$

ist.

Wir haben also den Satz:

Wenn man durch die geraden Linien, die man aus einem willkürlichen Punkt zu der Curve c_n ziehen kann, und die die Curve in zwei Punkten schneiden (die Doppelstrahlen), einen Kegel legt, so giebt es immer eine Monoide, die diesen Kegel zum Unterkegel hat, die die Curve enthält.

Da eine Curve c_n höchstens nur $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ scheinbare Doppelpunkte haben kann, und da man durch eine solche Anzahl von Linien, die durch denselben Punkt gehen, einen Kegel $(n-2)^{ter}$ Ordnung legen kann, so liegt eine Curve c_n immer auf einer Monoide $(n-1)^{ter}$ oder niedrigerer Ordnung.

23) Wir wollen jetzt suchen die folgende Frage zu beantworten:

Wann können wir eine ebene Curve φ_n als Projection einer Raumcurve c_n auffassen?

Nehmen wir zuerst an, dass die Raumcurve c_n mehr als $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ scheinbare Doppelpunkte h hat, indem h sowohl die Anzahl der Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt α als diese selbst bezeichnet. c_n liegt auf einer M_{n-2}.

Man sieht, *dass φ_n in diesem Fall immer als die Projection einer Raumcurve c_n aufgefasst werden kann.* Wenn wir nämlich durch die Doppellinien eines Kegels φ_n, der die ebene Curve projicirt, einen Kegel φ_{n-2} legen, schneidet φ_{n-2} noch φ_n in $h_1 = n(n-2) - 2h$ Linien, welche Linien auch selbst durch h_1 bezeichnet werden. Durch h und h_1 können wir einen Kegel φ_{n-1} legen, der nicht φ_{n-2} enthält; denn die Anzahl der Linien h und h_1 ist kleiner als

$$n(n-2) - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2} - 2,$$

also höchstens gleich $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - 3$, so dass φ_{n-1} wenigstens noch 3 Bedingungen erfüllen kann, während er nur 2 erfüllen könnte, wenn er φ_{n-2} enthielte.

Nehmen wir an, dass die Gleichungen der besprochenen Kegel beziehungsweise $\varphi_n = 0$, $\varphi_{n-1} = 0$, $\varphi_{n-2} = 0$ sind, so ist eine Raumcurve c_n Durchschnittcurve von $\varphi_n = 0$ und $\varphi_{n-1} - a\varphi_{n-2} = 0$, wo a eine homogene Function erster Ordnung der Coordinaten ist.

Im Allgemeinen hat c_n h scheinbare Doppelpunkte. In speciellen Fällen kann es geschehen, dass die Curve c_n statt einiger von diesen wirkliche Doppelpunkte hat, und in einigen noch specielleren Fällen müssen immer einige von den Doppelpunkten der ebenen Curve φ_n Projectionen von wirklichen Doppelpunkten auf c_n sein, wie wir im Folgenden sehen werden.

Wenn $h \overline{\gtrless} \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, und die ebene Curve φ_n Projection einer Raumcurve ist, kann man sich immer denken, dass c_n auf einer Monoide M_{n-3} liegt, wie man, 22) zufolge, leicht sieht. Da der Unterkegel von M_{n-3} ein willkürlicher Kegel φ_{n-3} sein kann, wenn er nur durch alle Doppelstrahlen der c_n geht, können wir uns diesen aus einer Ebene P, die durch einen der Doppelstrahlen d geht, und einem Kegel φ_{n-4}, der durch die übrigen Doppelstrahlen geht, zusammengesetzt denken. Der Oberkegel φ_{n-2} muss dann aber auch P enthalten, da er P in d und den übrigen $(n-2)$ Linien, worin P den c_n projicirenden Kegel φ_n schneidet, schneiden muss. Wenn aber sowohl der Unterkegel als der Oberkegel P enthält, muss die Monoide auch P enthalten, und an der Stelle von M_{n-3} können wir dann eine Monoide M_{n-4} setzen, die φ_{n-4} zum Unterkegel hat. Da aber der Unterkegel durch alle die Doppelstrahlen gehen muss, die durch den Scheitel der Monoide gehen, muss φ_{n-4} auch durch d gehen. Man sieht also, dass jeder Kegel φ_{n-4} immer durch einen Doppelstrahl aus einem willkürlichen Punkt gehen muss, weil er durch die übrigen geht, wenn $h \overline{\gtrless} \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Auf der ebenen Curve φ_n, die die Projection von c_n sein soll, müssen also die Doppelpunkte so liegen, dass eine Curve φ_{n-4} durch einen gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

Umgekehrt sehen wir, dass φ_n als die Projection einer Raumcurve

c_n aufgefasst werden kann, wenn φ_n h Doppelpunkte hat, die so liegen, dass eine φ_{n-4} durch einen unter ihnen gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

Denn wir können einen Kegel φ_n durch die ebene Curve legen. Ein Kegel φ_{n-4}, welcher durch die Doppellinien h von φ_n geht, schneidet dann noch φ_n in einer Gruppe von Linien α, die $(n-4)n-2h$ Linien enthält, wovon $\frac{(n-4)(n-1)}{2}-h+1$ willkürlich gewählt werden können. Dann wird aber ein φ_{n-3}, welcher durch h geht, durch alle die Linien α gehen, wenn er durch

$$((n-4)n-2h)-\left(\frac{(n-4)(n-1)}{2}-h+1\right)=\frac{n(n-3)}{2}-h-3$$

willkürliche Linien unter ihnen geht (siehe 6)). Da φ_{n-3} noch 3 Bedingungen erfüllen kann, ist es nicht nothwendig, dass er φ_{n-4} enthält.

Wie vorher sehen wir also, dass es eine c_n giebt, die die Durchschnittcurve von $\varphi_n=0$ und $\varphi_{n-3}-a\varphi_{n-4}=0$ ist.

Wir haben also den Satz:

Wenn die Anzahl der Doppelpunkte einer ebenen Curve φ_n gleich oder kleiner als $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ ist, ist es die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass diese Curve als Projection einer Raumcurve n^{ter} Ordnung c_n aufgefasst werden kann, dass eine Curve $(n-4)^{ter}$ Ordnung durch einen Doppelpunkt gehen muss, weil sie durch die übrigen Doppelpunkte geht.

Eben so wie im vorigen Fall bekommen die Raumcurven im Allgemeinen h scheinbare Doppelpunkte, die doch bisweilen durch wirkliche Doppelpunkte ersetzt werden können, und in speciellen Fällen sind immer einige der Doppelpunkte von φ_n, wenn φ_n die Projection von Raumcurven c_n sein kann, Projectionen von wirklichen Doppelpunkten auf c_n.

24) Nehmen wir an, dass eine Curve φ_n $h+D$ Doppelpunkte hat, dass $D+h>\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, und dass D Doppelpunkte von φ_n Projectionen von wirklichen Doppelpunkten jeder Raumcurve c_n, deren Projection φ_n ist, sein müssen; welche Lage müssen dann die Doppelpunkte auf φ_n haben?

Als Antwort bekommen wir den Satz:

Wenn eine ebene Curve $h + D$ Doppelpunkte hat, und man diese in zwei Gruppen, h und D, von h und D Punkten theilen kann, so dass eine φ_{n-4} durch

$$h + D - \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

von den Punkten h gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und dass sie durch keinen der Punkte D gehen muss, weil sie durch die übrigen Punkte D und h geht, so sind, wenn $h > \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, diese Bedingungen nothwendig und zulänglich, damit die Punkte D Projectionen von wirklichen Doppelpunkten jeder Curve c_n sein müssen, deren Projection φ_n ist.

Wir wollen durch die ebene Curve φ_n einen Kegel φ_n legen, dessen Doppellinien wir auch h und D nennen, je nachdem sie durch die Punkte h oder D gehen.

Wir können dann, nach dem, was vorausgesetzt ist, einen Kegel φ_{n-4} durch h und $D - 1$ Linien D legen, und eine Ebene P durch die letzte Linie D.

φ_{n-4} und P bilden dann einen Kegel φ_{n-3}. Nehmen wir diesen zum Unterkegel für die Monoide M_{n-3}, welche eine Curve c_n enthält, deren Projection φ_n ist, (und nach 23) giebt es immer eine solche Curve), muss der Oberkegel φ_{n-2} durch die $n - 1$ Linien gehen, worin P φ_n schneidet, und also P enthalten. Statt M_{n-3} können wir dann eine M_{n-4} setzen, die c_n enthält, deren Unterkegel φ_{n-4} gar nicht durch die eine Linie D geht. Also muss c_n auf dieser Linie einen wirklichen Doppelpunkt haben. Da aber dasselbe für alle Linien D gilt, muss c_n auf jeder D einen wirklichen Doppelpunkt haben.

Wir sehen also, dass die Bedingungen zulänglich sind; wir wollen jetzt zeigen, dass sie nothwendig sind.

Wenn die Linien D wirkliche Doppelpunkte von jeder c_n enthalten sollen, muss jeder φ_{m-1}, der durch h und D geht und in D einfache Linien hat, von jedem φ_m, der durch h und D und die übrigen Linien h_1 geht, in welchen φ_{m-1} φ_n schneidet, in jeder Linie D berührt werden; da wenn dieses nicht der Fall wäre, die Monoiden, welche φ_m und φ_{m-1} zu Ober- und Unterkegeln haben, φ_n in Curven c_n schneiden würden, die scheinbare Doppelpunkte in einigen Linien D haben würden (siehe 21)

Wenn $m > n-3$, kann φ_m, ausserdem dass er durch die Linien h, D und h_1 geht, wenigstens noch durch

$$nm - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - n(m-1) + h + D = n - p + D$$

willkürliche Linien von φ_n gelegt werden, indem wir $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h$ setzen.

Wenn φ_{m_1} und φ_{m_1-1} Kegel sind, die durch h gehen, aber nicht durch D, kann man durch jede Gruppe g von n Linien, worin φ_m ausser in den genannten Linien noch φ_n schneidet, einen φ_{m_1} legen, dessen übrige Durchschnittlinien mit φ_n auf einem willkürlichen φ_{m_1-1} liegen. Denn ein willkürlicher φ_{m_1-1} bildet mit φ_m zusammen einen Kegel φ_{m+m_1-1}, der durch alle Durchschnittlinien von φ_{m-1} und φ_n geht, und der, nach 4), noch φ_n in Linien schneidet, die auf einem φ_{m_1} liegen, welcher durch g geht.

Die Linien in welchen φ_{m_1-1} φ_n schneidet, die nicht in h fallen, werden j genannt. Da durch jede Gruppe g ein Kegel φ_{m_1} gelegt werden kann, der durch h und j geht, muss, nach 6), ein φ_{n-3} durch g gehen, wenn er durch h und $n-(n-p+D) = p-D$ willkürliche Linien der Gruppe g geht. Nun können g die Linien sein, worin eine willkürliche Ebene P, die durch den Scheitel von φ_n geht, φ_n schneidet, und in diesem Fall muss φ_{n-3} P enthalten. φ_{n-3} muss dann aus P und aus einem φ_{n-4}, welcher noch

$$(p-1)-(p-D) = D-1$$

Bedingungen erfüllen kann und durch h geht, zusammengesetzt sein. φ_{n-4} muss dann durch

$$h - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + D$$

von den Linien h gehen, weil sie durch die übrigen geht. Wir bemerken aber, dass diese Bedingung auch erfüllt ist, wenn φ_{n-4} durch

$$h - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + D + k$$

von den Linien h gehen muss, weil er durch die übrigen geht.

Wir nehmen also an, dass φ_{n-4} durch

$$h + D - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + k$$

der Linien h und durch keine weiteren gehen muss, weil er durch die übrigen geht.

Wenn nun ein φ_{n-4}, welcher durch h und $D - 1$ von den Linien D geht, auch daher durch den letzten gehen muss, können wir zeigen, dass φ_n nicht immer Curven c_n projicirt, die wirkliche Doppelpunkte auf D haben. Gesetzt nämlich, dass dieses der Fall sei. Dann muss jeder φ_{n-3}, welcher durch D, h und die übrigen Linien geht, worin φ_{n-4} φ_n schneidet, φ_{n-4} in den Linien D berühren. φ_{n-4} kann ausser durch h und D durch k willkürliche Linien von φ_n gelegt werden, und ein φ_{n-3}, der durch h, D und die übrigen Linien geht, worin φ_{n-4} φ_n schneidet, schneidet φ_n noch in einer Gruppe g von n Linien, wovon

$$\frac{n(n-3)}{2} - (n-4)n + h + D + k$$

willkürlich gewählt werden können.

Muss nun ein φ_{n-3} φ_{n-4} in allen den Linien D berühren, kann man durch h einen φ'_{n-3} legen, der durch eine Gruppe g gehen muss, wenn er durch

$$n - \left[\frac{n(n-3)}{2} - (n-4)n + D + h + k\right]$$

willkürliche Linien derselben geht, (was man wie oben sieht).

Da aber die Linien g in einer Ebene liegen können, und φ'_{n-3} ausser durch g und h noch durch $D + k$ willkürliche Linien von φ_n gelegt werden kann, muss es also ein φ_{n-4} geben, welcher durch h geht, und noch durch $D + k$ willkürliche Linien von φ_n gelegt werden kann, oder der durch

$$h + D - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + k + 1$$

Linien von h gehen muss, weil er durch die übrigen geht. Dieses ist aber im Streit mit dem, was vorausgesetzt ist, und also unmöglich. Also kann φ_n nicht immer Curven c_n projiciren, die wirkliche Doppelpunkte

auf D haben, wenn φ_{n-4} durch eine von den Linien D gehen muss, weil er durch h und die übrigen geht.

Der Beweis ist geführt, indem wir angenommen haben, dass φ_{n-4} keine Doppellinien in den Linien D hat, es ist aber nicht schwierig den Beweis auf ähnliche Weise zu führen, wenn dieses der Fall ist.

Auf ähnliche Weise sieht man:

Wenn eine ebene Curve φ_n $h + D$ Doppelpunkte hat, die man so in zwei Gruppen h und D, von h und D Punkten bestehend, theilen kann, dass eine φ_{n-4} durch einen Punkt von h gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und dass φ_{n-4} durch keinen Punkt von D gehen muss, weil sie durch h und die übrigen Punkte D geht, so sind diese Bedingungen, wenn

$$h + D \overline{\gtrless} \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

nothwendig und zulänglich dafür, dass die Doppelpunkte D Projectionen von wirklichen Doppelpunkten von jeder Raumcurve c_n, deren Projection φ_n ist, sein müssen.

25) Wenn eine Monoide M_{m-1} c_n enthält, werden im Folgenden die Linien derselben, die c_n in zwei Punkten schneiden (die Doppelstrahlen), immer h, die Linien, welche c_n in einem Punkte schneiden, h_1, die Linien, welche gar nicht c_n schneiden, h_0 genannt, indem h, h_1 und h_0 zugleich die Anzahl dieser Linien bezeichnen.

Wenn wir wie gewöhnlich den Oberkegel von M_{m-1} φ_m, den Unterkegel φ_{m-1} nennen, können wir durch h_1 und h_0 einen Kegel φ_{2m-n} legen, der φ_{m-1} in den Linien h_0 berührt; denn φ_m^2 (φ_m zweimal genommen) schneidet φ_{m-1} in allen denselben Linien wie φ_n, und durch die übrigen Durchschnittlinien von φ_m^2 und φ_{m-1} muss dann ein φ_{2m-n} gehen. (1)

---

(1) Vgl. mit dem Satz 25) Satz 3 von »On some new theorems on curves of double curvature by Professor STURM», Report of the british Association 1881, der sich leicht aus 25) ableiten lässt.

III.

Von der Lage der Doppelstrahlen.

26) Aus dem Satz 23) folgt:

Wenn eine Raumcurve, c_n, $h = d - x$ scheinbare Doppelpunkte hat, kann man immer durch die Doppelstrahlen h einen Kegel φ_m legen, der wenigstens noch x Bedingungen erfüllen kann, wenn

$$d = \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}$$

$$n - 2 > m \geqq \frac{(n-2)}{2}.$$

Wenn $m \geqq \frac{(n-2)}{2}$, kann man nicht durch alle die Doppelstrahlen h einen Kegel φ_{n-m-4} legen; denn könnte man dieses thun, müsste c_n auf einer M_{n-m-4} liegen. Nun ist $n - m - 4 < \frac{(n-2)}{2}$; es kann aber keine Monoide niedrigerer Ordnung als $\frac{n}{2}$ existiren, die c_n enthält. Denn der Oberkegel muss durch h und die übrigen Linien gehen, in welchen der Unterkegel den Kegel φ_n schneidet, der c_n projicirt. Wenn aber die Monoide $(m+1)^{ter}$ Ordnung ist, ist die Anzahl dieser Linien $mn - h$, und wir müssen also haben

$$mn - h \leq m(m+1),$$

und da φ_m durch h geht,

$$2h \leqq mn, \qquad h \leqq \frac{mn}{2},$$

und also

$$\frac{mn}{2} \leqq m(m+1)$$

$$m \geqq \frac{n}{2} - 1.$$

Man kann also unter den Linien h $\frac{(n-m-4)(n-m-1)}{2}$ wählen, die so

liegen, dass φ_{n-m-4} durch keine unter ihnen gehen muss, weil er durch die übrigen geht. Diese Liniengruppe wird h' genannt.

Durch die übrigen $\frac{m(m+3)}{2} - x + 1$ Linien h, die h'' genannt werden, kann man einen Kegel φ_m legen, der noch x Bedingungen erfüllen kann. Denn es muss wenigstens eine Linie L unter den Linien h'' geben, durch welche φ_{n-m-4} nicht gehen muss, weil er durch h' geht, da φ_{n-m-4} nicht durch alle die Linien h gehen kann. Legt man durch die Linien h'' mit Ausnahme von L einen φ_m, kann dieser noch x Bedingungen erfüllen und muss auch durch L gehen. Denn φ_m und φ_{n-m-4} bilden zusammen einen φ_{n-4}, der durch alle die Linien h mit Ausnahme von einer geht, und nach 23) muss er auch durch diese gehen. Nun geht φ_{n-m-4} nicht durch L, also muss φ_m dadurch gehen.

φ_m muss aber auch durch alle die Linien h' gehen, wenn er durch h'' geht; denn lässt man einen φ_{n-m-4} durch alle die Linien h' mit Ausnahme von einer gehen, bildet φ_{n-m-4} mit φ_m zusammen wieder einen φ_{n-4}, der durch alle die Linien h mit Ausnahme von einer, L', gelegt ist, und der also auch durch diese gehen muss. Da φ_{n-m-4} nicht durch L' geht, muss φ_m dadurch gehen, und da L' ganz willkürlich unter den Linien h' gewählt ist, muss φ_m durch alle die Linien h' gehen.

Wenn n eine gerade Zahl ist, ist $\frac{n(n-2)}{4}$ die geringste Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten, die c_n haben kann; denn hat c_n diese oder eine kleinere Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten, muss c_n auf einer $M_{\frac{n-2}{2}}$ liegen, und man muss also haben

$$\frac{(n-2)}{2} \cdot n - h \leq \frac{(n-2) \cdot n}{4}$$

$$h \gtrless \frac{(n-2)n}{4}.$$

Wenn n eine ungerade Zahl ist, ist die geringste Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten $\frac{(n-1)^2}{4}$; wenn nämlich c_n diese oder eine geringere Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten hat, muss sie auf einer $M_{\frac{n-1}{2}}$ liegen, und also ist

$$\frac{(n-1)n}{2} - h \leq \frac{(n-1)(n+1)}{4}.$$

27) In 26) ist erwiesen, dass ein Kegel φ_m wenigstens durch

$$\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}$$

der Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt zu einer c_n gehen muss, weil er durch die übrigen geht; wir wollen aber zeigen, dass φ_m, wenn $m \overline{\gtrless} n-5$, immer durch eine noch grössere Anzahl der Doppelstrahlen gehen muss, weil er durch die übrigen geht, wenn c_n nicht auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt. Nehmen wir nämlich an, dass φ_m nur durch $\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}$ der Doppelstrahlen gehen muss, weil er durch die übrigen geht, und dass c_n

$$h = \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2} - d$$

scheinbare Doppelpunkte hat, so muss c_n auf einer M_m liegen, die ihren Scheitel in einem willkürlichen Punkt hat, und deren Unterkegel noch d Bedingungen erfüllen kann.

Von den Linien h_1 können d willkürlich gewählt werden. Die Linien h_1 bilden dann auf φ_n, dem c_n projicirenden Kegel, eine Gruppe von h_1 Linien, von denen d willkürlich gewählt werden können, und ein Kegel φ_{n-3}, der durch h geht, wird dann, 6) zufolge, durch alle die Linien h_1 gehen, wenn er durch $h_1 - d$ willkürliche Linien unter ihnen geht.

Ein solcher Kegel kann noch

$$r = \frac{n(n-3)}{2} - h - (h_1 - d) = \frac{n(n-3)}{2} - mn + h + d =$$

$$= (n-m-1)(n-m-3) = \frac{(n-m-4)(n-m-1)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-1)}{2}$$

Bedingungen erfüllen. Diese Zahl zeigt aber, dass der φ_{n-3} durch alle die Linien h_0 gehen muss, weil er durch h und h_1 geht, denn ein Kegel φ_{n-3}, der durch alle die geraden Linien der M_m geht, kann noch eben so viele Bedingungen erfüllen. Dann muss aber, wenn $n-3 \overline{\gtrless} m+2$, jeder Kegel φ_{m+2}, der durch die übrigen Linien der M_m geht, auch durch h_0 gehen.

Ein Kegel φ_{m+2}, der durch alle gerade Linien der M_m geht, schneidet aber noch M_m in einer Curve, die auf einer willkürlichen Fläche F_2 liegt, da er durch die vollständige Durchschnittcurve des Unterkegels und der M_m geht, und da φ_{m+2} nur 8 Bedingungen erfüllen kann, muss c_n auf einer F_2 liegen.

Umgekehrt kann ein Kegel φ_m nicht durch eine grössere Anzahl der Doppelstrahlen, als hier angegeben, gehen, weil er durch die übrigen geht, wenn c_n auf einer F_2 liegt. c_n muss zwei Erzeugende von F_2, die zu verschiedenen Reihen gehören, zusammen in n Punkten schneiden, weil die Erzeugenden zusammen einen ebenen Schnitt von F_2 bilden. Wenn c_n also jede Erzeugende der einen Reihe in k Punkten schneidet, muss sie jede Erzeugende der anderen Reihe in $(n-k)$ Punkten schneiden. Wenn man einen Punkt P von F_2 zum Augenpunkt nimmt, sieht man, dass c_n in der einen Erzeugenden von F_2, die durch P geht, einen scheinbaren k-fachen Punkt hat, und in der anderen einen scheinbaren $(n-k)$-fachen Punkt hat, und dass sie keine andere scheinbare Doppelpunkte hat. c_n hat also

$$h = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

scheinbare Doppelpunkte.

Ein Kegel niedrigerer Ordnung als der $(n-k-1)^{ten}$ kann, wenn $n-k \geq k$, nicht durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt gelegt werden; denn c_n würde sonst auf einer Monoide niedrigerer Ordnung als der $(n-k)^{ten}$ liegen, was unmöglich ist, da diese jede Erzeugende der einen Reihe in $(n-k)$ Punkten schneiden würde, und also F_2 ganz enthalten würde. Eine Monoide, die ihren Scheitel in einem Punkt hat, der nicht auf F_2 liegt, kann aber F_2 nicht enthalten. Ein Kegel m^{ter} Ordnung, der durch h geht, kann, 26) zufolge, noch durch

$$\frac{m(m+3)}{2} - h + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2} = l$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, indem $n-3 > m \geq n-k-1$. Die Monoide M_m kann also, ausserdem dass sie c_n enthält, noch l Bedingungen erfüllen.

Bezeichnen $p_1, p_2 \ldots.$ u. s. w. ebene Schnitte von F_2, können wir

eine solche M_m durch $(2m - n + 3)$ Punkte von p_1, durch $(2m - n + 1)$ Punkte von $p_2, \ldots$, durch $(n - 2k + 3)$ Punkte von $p_{(m+k-n+1)}$ legen, und man sieht dann, dass M_m $p_1, p_2, \ldots, p_{m+k-n+1}$ enthalten muss, und dass sie noch durch $n - 2k$ willkürliche Punkte gelegt werden kann.

Lässt man M_m noch durch $n - 2k$ willkürliche Punkte P_i von F_2 gehen, sieht man, dass M_m jede Erzeugende der einen Reihe f_i, welche durch einen P_i geht, und c_n in $(n - k)$ Punkten schneidet, enthalten muss; denn f_i schneidet M_m in P_i, in den $(n - k)$ Punkten, worin f_i c_n schneidet, und in den Punkten, worin f_i $p_1, p_2, \ldots, p_{m+k-n+1}$ schneidet, zusammen in $(m + 2)$ Punkten.

Eine M_m, die c_n enthält, kann nicht mehrere Bedingungen, als oben angegeben, erfüllen. Denn könnte sie noch eine erfüllen, könnte man M_m noch durch einen willkürlichen Punkt von F_2 legen, und sie müsste dann die eine Erzeugende, die durch diesen Punkt ginge, enthalten, und also F_2 in einer Curve höherer Ordnung als $2(m + 1)$ schneiden, was unmöglich ist, ohne dass sie F_2 enthält. Wie oben sieht man aber, dass M_m F_2 nicht enthalten kann.

28) Wir wollen in den folgenden Paragraphen die Principien entwickeln, nach welchen man vorgehen muss, um die niedrigste Ordnung des Kegels zu finden, den man durch die Doppelstrahlen h einer gegebenen Raumcurve legen kann.

Nehmen wir an, dass c_n auf einer M_m liegt, deren Unterkegel φ_m und deren Oberkegel φ_{m+1} ist. Eine willkürliche Fläche F_p schneidet jede gerade Linie, die auf M_m liegt, in p Punkten, und also hat die vollständige Durchschnittcurve $c_{(m+1)p}$ von F_p und M_m einen scheinbaren p-fachen Punkt in jeder geraden Linie der Monoide M_m, wenn man den Scheitel α zum Augenpunkt nimmt.

Umgekehrt liegt jede Curve $c_{(m+1)p}$, die einen scheinbaren p-fachen Punkt in jeder geraden Linie der M_m hat, auf einer F_p; denn der $\varphi_{(m+1)p}$, welcher $c_{(m+1)p}$ projicirt und seinen Scheitel in α hat, hat eine p-fache Linie in jeder geraden Linie der Monoide und schneidet also M_m in denselben Linien wie φ_m^p (φ_m p-mal genommen). Die übrige Durchschnittlinie von $\varphi_{(m+1)p}$ und M_m muss also, 18) zufolge, auf einer F_p liegen.

Nennen wir den Kegel, der c_n projicirt, φ_n, sehen wir, dass $\varphi_{(m+1)p}$ φ_n in denselben Linien schneidet wie φ_m^{p-1}, und, da $\varphi_{(m+1)p}$ sowohl in den Linien h, die $(p - 1)$-fach auf φ_m^{p-1}, doppelt auf φ_n sind, als in den

Linien h_1, die $(p-1)$-fach auf φ_m^{p-1}, einfach auf φ_n sind, p-fache Linien hat, dass, 4) zufolge, die übrigen Durchschnittlinien von φ_n und $\varphi_{(m+1)p}$ auf einem φ_{m+p}, der durch h und h_1 geht, liegen müssen.

Das Resultat dieser Untersuchungen ist also:

Wenn c_n auf einer M_m liegt, liegen die Schnittpunkte von c_n und F_p auf einem Kegel φ_{m+p}, der durch h und h_1 geht.

Der umgekehrte Satz gilt nicht immer; im nächsten Abschnitt soll etwas näher untersucht werden, wann dieses der Fall ist.

29) Indem wir die Bezeichnungen von 28) beibehalten, nehmen wir an, dass φ_{m+p}, ausser den Punkten, die auf h und h_1 liegen, c_n noch in einer Gruppe H_p schneidet, die aus np Punkten besteht, von denen man z_p willkürlich wählen kann. Wenn ein φ_{n-3} durch H_p gelegt werden kann, und wenn φ_{n-3} durch h geht und noch x Bedingungen erfüllen kann, kann man durch h einen φ_{n-p-3} legen, der noch x Bedingungen erfüllen kann. Denn durch H_p geht ein φ_{m+p}, und φ_{n-3} bildet mit φ_m zusammen einen φ_{n+m-3}, der durch alle Schnittlinien von diesem φ_{m+p} und von φ_n geht, und der Doppellinien in allen den Linien h hat. Also muss, nach 4), φ_{n+m-3} φ_n noch in Linien schneiden, die auf einem φ_{n-p-3}, welcher durch h geht, liegen, und der Residualtheorie zufolge weiss man, dass φ_{n-3} durch eben so viele willkürliche Linien von φ_n gelegt werden kann wie φ_{n-p-3}.

Nach 6) geht aber φ_{n-3} durch eine Gruppe H_p, wenn er durch $np-z_p$ willkürliche Punkte dieser Gruppe gelegt wird; und da φ_{n-3} $\frac{n(n-3)}{2}-h$ Bedingungen erfüllen kann, ist die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass man einen φ_{n-3} durch eine H_p legen kann, dass

$$np-z_p \leqq \frac{n(n-3)}{2}-h$$

$$z_p \geqq np-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+h+1.$$

Man hat also den Satz:

Wenn ein φ_{m+p}, der durch die Linien h und h_1 einer Monoide M_m geht, welche eine Curve c_n enthält, noch z_p Bedingungen erfüllen kann, geht ein φ_{n-p-3}, der noch $z_p-np+\frac{(n-1)(n-2)}{2}-h-1$ Bedingungen erfüllen kann, durch h, wenn

$$z_p \overline{\gtrless} np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1.$$

Da man durch jedes vollständige Schnittpunktsystem einer F_p und einer c_n einen φ_{m+p} legen kann, kann φ_{m+p} wenigstens durch ebenso viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden wie F_p. Wenn also F_p durch y_p willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, kann man durch h einen φ_{n-p-3} legen, wenn

$$y_p \overline{\gtrless} np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1.$$

30) Wir wollen jetzt eine untere Grenze dafür bestimmen, durch wie viele Punkte einer Raumcurve c_n wir immer eine F_p legen können, wenn wir annehmen, dass c_n auf einer F_q liegt, und dass

$$n = mq + k \qquad (q > k), \qquad p \overline{\lessgtr} m + q - 3.$$

Wir wollen zuerst $m > q$ annehmen. Eine Fläche F_p kann nicht c_n enthalten, wenn $p < q$, und eine solche Fläche kann man also durch

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 1$$

willkürliche Punkte von c_n legen.

Wenn $q \overline{<} p \overline{<} m$, kann eine Fläche F_p nicht c_n enthalten ohne sich in F_q und eine F_{p-q} aufzulösen.

F_p kann also durch ebenso viele willkürliche Punkte von c_n wie von F_q gelegt werden, ohne dass sie c_n enthalten muss. F_p kann daher durch

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2}$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden. Wenn $k = 0$, gilt diese Formel nicht für $p = m$.

Wenn endlich $p > m$ (oder wenn $k = 0$ auch $= m$), kann eine F_p, ausserdem dass sie c_n in n Punkten schneidet, die in einer Ebene liegen, wenigstens durch eben so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden wie eine F_{p-1}. Ist es wenigstens a_p Bedingungen für F_p durch die Punkte

gehen zu sollen, worin eine Ebene c_n schneidet, und kann man F_p durch y_p willkürliche Punkte von c_n legen, hat man

$$y_p \overline{\overline{>}} a_p + y_{p-1},$$

und wie leicht zu sehen

$$y_p \overline{\overline{>}} \sum_{p-r+1}^{p} a_p + y_{p-r}.$$

Nun wissen wir (siehe 11)), dass eine Curve p^{ter} Ordnung höchstens durch

$$\frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1)$$

Punkte einer Gruppe α von n Punkten gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, wenn α auf einer unauflöslichen Curve q^{ter} Ordnung liegt, $m+1 \overline{\overline{<}} p \overline{\overline{<}} m+q-3$ und $\varepsilon = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $m+k-p-1 \lesseqgtr 0$. Daraus folgt dass

$$a_p \overline{\overline{>}} n - \left(\frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1)\right),$$

und da

$$y_m = \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{mq(m-q+4)}{2},$$

$$y_p \overline{\overline{>}} y_m + \sum_{m+1}^{p} a_p \overline{\overline{>}} \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{mq(m-q+4)}{2}$$

$$+ \sum_{m+1}^{p}\left(n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1)\right)$$

$$= \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2}$$

$$- \frac{(p-m)(p-m+1)(p-m+2)}{6} - \varepsilon_1 \frac{(p-k-m+1)(p-k-m+2)}{2}$$

wo $\varepsilon_1 = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $p-k-m+1 \lesseqgtr 0$.

Nehmen wir jetzt an, dass $m < q$. Dann kann eine F_p, wenn $p < m+1$ und $k > 0$ (und wenn $p < m$, $k = 0$) c_n nicht enthalten, und

sie kann daher durch $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 1$ willkürliche Punkte der c_n gelegt werden. Wenn $p > m$, müssen wir auf dieselbe Weise verfahren wie in dem Fall, wo $p > m > q$. Wenn wir dieselben Bezeichnungen behalten, wissen wir, 11) zufolge, dass, wenn $q > p > m$,

$$a_p \geqq n - \left(m(q-p) + \frac{(m-3)m}{2} + \varepsilon(m+k-p-1)\right),$$

indem $\varepsilon = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \lesseqgtr 0$, und da

$$y_m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1,$$

$$y_p \overline{\overline{>}} y_m + \sum_{m+1}^{p}\left(n - m(q-p) - \frac{m(m-3)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1)\right)$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{p(m+1)(p-m+3)}{2} - \varepsilon_1\frac{(p-m-k+1)(p-m-k+2)}{2},$$

indem $\varepsilon_1 = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $p - m - k + 1 \lesseqgtr 0$.

Wenn $k = 0$, ist die Formel auch für $p = m$ richtig.

Wir nehmen jetzt an, dass $m + q - 3 \overline{\overline{>}} p \overline{\overline{>}} q$. Wir haben dann, 11) zufolge,

$$a_p \overline{\overline{>}} n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1),$$

indem $\varepsilon = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \lesseqgtr 0$,

$$y_p \overline{\overline{>}} y_{q-1} + \sum_{q}^{p}\left(n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1)\right)$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{p(m+1)(p-m+3)}{2}$$

$$- \frac{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)}{6} - \varepsilon_1\frac{(p-k-m+1)(p-k-m+2)}{2}$$

wo $\varepsilon_1 = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, je nachdem $p - k - m + 1 \lesseqgtr 0$.

31) Nachdem wir in 30) Formeln dafür entwickelt haben, wie gross man immer y_p annehmen kann, und in 29) gesehen haben, dass man durch h einen φ_{n-p-3} legen kann, wenn

$$y_p \overline{\overline{>}} pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1,$$

$$h \overline{\overline{<}} y_p - pn + \frac{(n-3)n}{2}.$$

finden wir die folgenden Sätze:

Wenn c_n *auf einer* F_q *liegt, und* $n = mq + k$, $m > q > k$, *wissen wir, dass wir durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt einen* φ_{n-p-3} *legen können in den Fällen:*

1) Wenn $p < q$ *und*

$$h \overline{\overline{<}} \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 1.$$

2) Wenn $m \geqq p \geqq q$ *und*

$$h \overline{\overline{<}} \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2}.$$

3) Wenn $m + q - 3 > p > m$ *und*

$$h \overline{\overline{<}} \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2}$$

$$- \frac{(p-m)(p-m+1)(p-m+2)}{6} - \varepsilon_1 \frac{(p-k-m+1)(p-k-m+2)}{2},$$

indem $\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, *je nachdem* $p - k - m + 1 \lesseqgtr 0$.

Wenn $m < q$, *und sonst dieselben Bedingungen wie im Falle* $m > q$ *bestehen, können wir durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkte einen* φ_{n-p-3} *legen in den Fällen:*

1) Wenn $p \leqq m$, *und*

$$h \overline{\overline{<}} \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 1.$$

2) *Wenn* $m < p < q$, *und*

$$h \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2} - np + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{p(m+1)(p-m+3)}{2}$$
$$- \varepsilon_1 \frac{(p-m-k+1)(p-m-k+2)}{2}.$$

3) *Wenn* $m + q - 3 > p > q$ *und*

$$h \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2} - pn + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{p(m+1)(p-m+3)}{2}$$
$$- \varepsilon_1 \frac{(p-m-k+1)(p-m-k+2)}{2} - \frac{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)}{6},$$

indem $\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, *je nachdem* $p - m - k + 1 \lesseqgtr 0$.

Man hat in diesen Formeln nicht darauf Rücksicht genommen, dass $k = 0$ sein kann, es ist aber leicht zu sehen, wie man dieses thun kann.

Die hier gefundenen Formeln drücken nur aus, was immer statt finden muss, nicht aber, dass man niemals durch h einen Kegel $(n-p-3)^{ter}$ Ordnung legen kann, wenn die Anzahl der Doppelstrahlen grösser, als hier angegeben ist. (¹)

32) *Wir wollen jetzt zeigen, dass wenn* $p \geqq m + q - 3$, *ein* φ_{m+p}, *der durch* h *und* h_1 *geht, immer durch*

$$np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

willkürliche Punkte von c_n *gelegt werden kann, indem* c_n *auf einer* M_m *liegt.*

Wir brauchen dieselben Bezeichnungen wie in 29). φ_{m+p} ist nur den Bedingungen unterworfen durch h und h_1 gehen zu sollen, und wenn p zulänglich hoch, ist dieses mit $h + h_1$ Bedingungen eqvivalent. Also kann man, wenn p zulänglich hoch und $m + p > n$, φ_{m+p} durch

$$n(m+p) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (h + h_1)$$

willkürliche Punkte von c_n legen.

Nun bilden h und h_1 zusammen die Schnittlinien des Unterkegels φ_m und des c_n projicirenden Kegels φ_n, und, da h Doppellinien auf φ_n sind, muss man $2h + h_1 = mn$, $h + h_1 = mn - h$ haben.

(¹) Wir wollen später zu diesem Punkt zurückkommen.

Also kann φ_{m+p} durch

$$np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden.

Nun kann man zeigen, dass, wenn dieses für p richtig ist, es auch für $p-1$ richtig ist, wenn es mit n Bedingungen eqvivalent ist, dass φ_{m+p} durch die Punkte gehen soll, worin eine willkürliche Ebene c_n schneidet. Eine φ_{m+p}, die durch eine Gruppe H_{p_1} geht, schneidet nämlich noch c_n in einer Gruppe H_{p-p_1}. Denn durch H_{p_1} geht ein φ_{m+p_1}, und φ_{m+p} und φ_m bilden einen φ_{2m+p}, der durch alle die Durchschnittlinien von φ_{m+p_1} und von φ_n geht, und da φ_{2m+p} Doppellinien in den Linien h hat, die doppelt auf φ_n sind, schneidet φ_{2m+p} noch φ_n in Linien, die auf einem φ_{m+p-p_1} liegen.

Auf dieselbe Weise sieht man, dass zwei willkürliche Gruppen H_{p-p_1} und H_{p_1} zusammen eine Gruppe H_p bilden. Nehmen wir jetzt an, dass man φ_{m+p} durch z_p willkürliche Punkte von c_n legen kann. Ein φ_{m+p}, der durch die Punkte geht, worin eine willkürliche Ebene c_n schneidet, kann, da die Ebene c_n in Punkten schneidet, die eine Gruppe H_1 bilden, noch durch eine willkürliche Punktgruppe H_{p-1} gelegt werden. Wenn es nun mit α_p Bedingungen eqvivalent ist, dass φ_{m+p} durch die Punkte gehen soll, worin eine willkürliche Ebene c_n schneidet, hat man

$$z_p = \alpha_p + z_{p-1}, \qquad z_{p-1} = z_p - \alpha_p,$$

und, wenn $\alpha_p = n$, $z_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, ist also

$$z_{p-1} = (p-1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h.$$

Nun bilden die Punkte, worin eine willkürliche F_p c_n schneidet, eine Gruppe H_p, und da, 11) zufolge, F_p, wenn $p > m + q - 3$, durch keinen der Punkte, worin eine willkürliche Ebene c_n schneidet, gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, muss keiner von diesen Punkten zu einer H_p gehören, weil die übrigen dieses thun. Wenn $p > m + q - 3$, ist also $\alpha_p = n$, und nach dem, was vorher gesagt ist, hat man auch

$$z_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn $p \geqq m + q - 3$.

Da also, wenn $p \overline{\gtrless} m + q - 3$, $z_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, kann man niemals eine φ_{n-3} durch eine H_p legen, wenn $p \overline{\overline{>}} m + q - 3$, *und man kann also niemals einen Kegel niedrigerer Ordnung als*

$$n - 3 - (m + q - 4) = n - m - q + 1$$

durch h legen.

Da nach dem, was hier angeführt ist, φ_{m+p} niemals durch weniger als $pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, und da man durch h einen Kegel φ_{n-p-3} legen kann, wenn φ_{m+p} durch mehrere willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, sieht man, dass

$$z_p = np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn

$$(n - p - 3)n < 2h$$

$$h > \frac{(n-p-3)n}{2},$$

indem man sonst durch h einen Kegel φ_{n-p-3} legen könnte, der φ_n in mehr als $(n - p - 3)n$ Linien schneiden würde.

33) Wir werden jetzt die im Vorhergehenden entwickelten Formeln dazu verwenden, den kleinsten Werth von h zu finden, wenn c_n auf einer F_q liegt, $n = mq + k$, $m > q$.

Wir wissen (30)), dass

$$y_{m+q-3} \overline{\overline{>}} \frac{(m+q-3)q(m+1)}{2} - \frac{(q-k-2)(q-k-1)}{2}.$$

und (32)) dass

$$z_{m+q-3} = (m + q - 3)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

und da nach 28)

$$z_{m+q-3} \overline{\overline{>}} y_{m+q-3},$$

müssen wir also haben

$$h = \frac{(n-q+k)(n-m-k)}{2}.\ ^{(1)}$$

34) Wenn h seinen kleinsten Werth hat, und $q < m$, liegt c_n auf einer F_{m+1}. In diesem Fall kann nämlich eine F_{m+1} nicht durch mehr als

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{(m+1)q(m-q+5)}{2} - 1 - \varepsilon_1 \frac{(2-k)(3-k)}{2}$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden ohne diese zu enthalten. Denn könnte man F_{m+1} noch durch x willkürliche Punkte von c_n legen, könnte man auch eine Fläche F_{m+2} durch

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{(m+2)q(m-q+6)}{2} - 4 - \varepsilon_1 \frac{(3-k)(4-k)}{2} + x$$

Punkte von c_n legen u. s. w., so dass man eine Fläche F_{m+q-3} durch

$$\frac{(m+q-3)q(m+1)}{2} - \frac{(q-k-2)(q-k-1)}{2} + x$$

willkürliche Punkte von c_n legen könnte, was man durch das Verfahren von 30) sieht, indem ε_1 dieselbe Bedeutung wie in 30) hat. Dieses ist aber unmöglich, denn wir haben

$$y_{m+q-3} \overline{\gtrless} z_{m+q-3},$$

$$\frac{(m+q-3)q(m+1)}{2} - \frac{(q-k-2)(q-k-1)}{2} + x \overline{\gtrless}$$

$$(m+q-3)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

und dieses kann, wenn h seinen kleinsten Werth hat, nur statt finden, wenn $x = 0$.

Da man eine F_{m+1} durch

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{(m+1)q(m-q+5)}{2}$$

willkürliche Punkte von F_q legen kann, geht also immer eine F_{m+1} durch

(1) Dieses ist zuerst von Halphen gefunden, Comptes rendus, tom. LXX, p. 380.

c_n. Die F_{m+1}, welche durch c_n geht, schneidet noch F_q in einer ebenen Curve c_{q-k}. Denn nimmt man an, dass c_{q-k} h' scheinbare Doppelpunkte hat, weiss man (siehe SALMON, Geom. of three dim. 3 ed. p. 315), dass

$$h - h' = \frac{(n-q+k)(q-1)m}{2}$$
$$= \frac{(n-q+k)(n-m-k)}{2}.$$

und dass also $h' = 0$ ist.

Daraus folgt, dass wenn $k = 0$, und h seinen kleinsten Werth hat, c_n die vollständige Durchschnittcurve einer F_q und einer F_m ist.

Wenn h seinen kleinsten Werth hat, zeigt 32), dass man durch h einen $\varphi_{n-m-q+1}$ legen kann. Wenn $k=0$, ist $n-m-q+1=(m-1)(q-1)$, *so dass man durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt zu der vollständigen Durchschnittcurve einer Fläche m^{ter} Ordnung und einer Fläche q^{ter} Ordnung einen Kegel $(m-1)(q-1)^{ter}$ Ordnung legen kann.*

IV.

Die Lehre von den Schnittpunkten der Raumcurven und der Flächen.

35) In dem vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, (29)), dass alle die Punkte, worin eine Fläche F_p eine Raumcurve c_n, die auf einer M_m liegt, schneidet, auf einem φ_{m+p}, der durch h und h_1 geht, liegen. Wenn ein solcher φ_{m+p} c_n in einer Punktgruppe H_p, wovon z_p Punkte willkürlich gewählt werden können, schneidet, und wenn eine F_p durch y_p willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten, muss $y_p \overline{\overline{<}} z_p$ sein. Liegt nun c_n auf einer F_q, wissen wir, dass (siehe 32)

$$z_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn

$$n = mq + k \qquad (q > k),$$
$$p > m + q - 4.$$

Unter denselben Voraussetzungen haben wir also

$$y_p \overline{\overline{<}} pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, dass, wenn p zulänglich hoch ist, $y_p = z_p$. Denn, wenn die Schnittpunkte von φ_{m+p} und c_n bestimmt sind, kann man immer, wenn p zulänglich hoch, φ_{m+p} noch durch h_0 legen, ohne dass φ_{m+p} daher den Kegel φ_n, der c_n projicirt, enthalten muss. φ_{m+p} geht dann durch alle die geraden Linien der M_m, und da diese Linien zusammen die vollständige Durchschnittcurve von M_m und dem Unterkegel φ_m bilden, muss der übrige Theil der Durchschnittcurve von φ_{m+p} und M_m auf einer F_p liegen, so dass die Schnittpunkte von c_n und φ_{m+p}, die nicht auf h oder h_1 liegen, auf einer F_p liegen.

Wenn also p so gross wie hier angenommen ist, muss man $y_p = z_p$ haben.

Wir wollen jetzt zeigen, dass wenn $p = n - 2$, kann man immer φ_{m+p}, wenn seine Schnittpunkte mit c_n bestimmt sind, durch h_0 legen. Wir können $m \overline{\overline{<}} n - 2$ annehmen. Dann muss φ_{m+n-2} durch keine der Linien gehen, worin φ_m und φ_{m+1} einander schneiden, weil sie durch die übrigen geht, da $m + n - 2 > m + (m + 1) - 3$ (siehe 11)).

Es ist also für einen φ_{m+n-2} mit $m(m + 1)$ Bedingungen eqvivalent durch alle die geraden Linien der Monoide gehen zu sollen. φ_{m+n-2} kann dann noch durch $z_{n-2} = (n-2)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ willkürliche Linien von φ_n gelegt werden ohne φ_n zu enthalten. Denn φ_{m+n-2} kann, ausserdem dass er durch h, h_1, h_0 und z_{n-2} willkürliche Punkte von c_n geht, noch

$$\frac{(m+n-2)(m+n+1)}{2} - m(m+1) - (n-2)n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h =$$

$$= m(n-3) - \frac{m(m-3)}{2} - h = u_{n-2}$$

willkürliche Bedingungen erfüllen. Könnte nun ein φ_{m+n-2}, der durch alle die geraden Linien der Monoide ginge, nicht durch z_{n-2} willkürliche Linien von φ_n gelegt werden ohne diesen zu enthalten, müsste er sich in diesem Falle in φ_n und einen φ_{m-2}, der durch h_0 ginge und noch u_{n-2}

Bedingungen erfüllen könnte, auflösen. Ein φ_{m-2}, der durch h_0 ginge, müsste also durch u_{n-2} willkürliche Punkte von φ_m gelegt werden können.

φ_{m-2} und φ_n würden aber zusammen einen φ_{n+m-2} bilden, der durch alle die Durchschnittlinien von φ_m und φ_{m+1} ginge, und also noch φ_m in Linien, die auf einem φ_{n-3} lägen, welcher durch h ginge, schneiden müsste. Man müsste also einen solchen φ_{n-3} durch u_{n-2} willkürliche Punkte von φ_m legen können. Es ist aber für einen φ_{n-3} h Bedingungen durch alle die Linien h gehen zu sollen (7)), und im Ganzen kann ein φ_{n-3} durch

$$(n-3)m-\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

willkürliche Linien von φ_m gelegt werden; ein φ_{n-3}, der durch h geht, kann also nur noch durch

$$m(n-3)-\frac{(m-1)(m-2)}{2}-h=u_{n-2}-1$$

willkürliche Linien von φ_m gelegt werden, und es ist unmöglich, dass ein φ_{m-2} durch h_0 und u_{n-2} willkürliche Linien von φ_m gelegt werden kann. Daraus sieht man, dass ein φ_{m+n-2}, der durch z_{n-2} willkürliche Punkte von c_n geht, nicht c_n enthalten muss, weil er durch h_0 gelegt wird. Da die Schnittpunkte von c_n und φ_{m+n-2} durch z_{n-2} unter ihnen bestimmt sind, kann man also, was zu beweisen war, einen willkürlichen φ_{n+m-2}, dessen Schnittpunkte mit c_n bestimmt sind, durch h_0 legen, ohne dass er daher φ_n enthalten muss.

Es ist leicht zu zeigen, dass wenn die Formel

$$y_p=pn-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+h$$

für $p=n-2$ gilt, sie auch für $p>n-2$ richtig sein muss. Man kann es zum Beispiel durch Induction thun. Wir wissen dass

$$y_{p+1} \overline{\overline{>}} y_p+n,$$

wenn p so gross ist, dass es für eine F_{p+1} mit n Bedingungen eqvivalent ist, durch alle die Punkte gehen zu sollen, worin eine Ebene c_n schneidet; denn eine F_{p+1}, welche durch alle die Punkte geht, worin eine Ebene c_n

schneidet, kann wenigstens noch durch eben so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden wie eine F_p, da die Ebene und eine F_p zusammen eine F_{p+1} bilden. Wenn nun

$$y_p = pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wissen wir also, dass

$$y_{p+1} \overline{\overline{>}} (p+1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h.$$

Da aber auch

$$y_{p+1} \overline{\overline{<}} z_{p+1},$$

und

$$z_{p+1} = (p+1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

muss man $y_{p+1} = z_{p+1}$ haben, und der Satz ist für $p+1$ richtig, wenn er für p richtig ist und $p \overline{\overline{>}} n-2$. Wir haben also jetzt bewiesen:

Wenn $p \overline{\overline{>}} n-2$, sind die Schnittpunkte einer F_p und einer c_n, die h scheinbare Doppelpunkte hat, durch

$$pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

unter ihnen bestimmt.

Die Methode, welche hier verwendet ist, um die Zahl y_p zu finden, welche angiebt, durch wie viele Punkte die Schnittpunkte einer c_n und einer F_p bestimmt sind, ist aber ausser den Fällen $p \overline{\overline{>}} (n-2)$ selten brauchbar, und wir müssen also andere Methoden suchen.

36) Wir wollen jetzt einige Hülfssätze über vollständige Durchschnittcurven zweier Flächen entwickeln, weil wir diese Sätze im Folgenden brauchen. Diese Sätze sind Sätzen von ebenen Curven ganz analog, auch die Beweise sind analog.

Eine Fläche F_s, welche durch das vollständige Schnittpunktsystem α einer Fläche F_r und einer vollständigen Durchschnittcurve c_{pq} zweier Flächen F_p und F_q geht, schneidet noch c_{pq} in dem vollständigen Schnittpunktsystem von c_{pq} und einer F_{s-r}.

Wir setzen voraus, dass F_r durch keinen Punkt geht, der doppelt sowohl auf F_p als F_q ist, und dass F_r keinen Doppelpunkt auf c_{pq} hat, so

dass es immer vollständig bestimmt ist, wie man es verstehen soll, dass F_s durch die Durchschnittpunkte von F_r und c_{pq} gehen soll.

Uebrigens kann c_{pq} sowohl unauflöslich wie auflöslich sein, wie auch Theile davon mehrfach auf einer der Flächen F_p oder F_q sein können.

Erstens ist der Satz richtig, wenn s so hoch ist, dass es für eine Fläche F_s mit pqr Bedingungen eqvivalent ist durch α gehen zu sollen, und wenn $s > p + q + r - 4$. Denn, wenn $s > p + q - 4$, kann F_s (18)) im Ganzen durch

$$spq - \frac{pq(p + q - 4)}{2} - 1$$

willkürliche Punkte von c_{pq} gelegt werden; wenn F_s also durch α geht, und s so gross ist, dass F_s durch keinen Punkt von α gehen muss, weil sie durch die übrigen Punkte derselben geht, kann sie noch durch

$$(s - r)pq - \frac{pq(p + q - 4)}{2} - 1$$

willkürliche Punkte von c_{pq} gelegt werden. Durch so viele Punkte kann aber auch eine F_{s-r} gelegt werden, da $(s - r) > p + q - 4$, woraus man sieht, dass der Satz in diesem Fall richtig ist, da eine F_r und eine F_{s-r} zusammen eine F_s bilden.

Darnach können wir zeigen, dass der Satz für $(s - 1)$ richtig ist, wenn er für s richtig ist.

Der Beweis wird geführt, indem wir zeigen, dass eine Fläche F_t, die c_{pq} in pq Punkten schneidet, die auf einer Ebene liegen, noch c_{pq} in Punkten schneiden wird, die auf einer F_{t-1} liegen. Denn der Satz wird für eine F_s, die aus einer F_{s-1}, welche durch α geht, und einer willkürlichen Ebene P zusammengesetzt ist, gelten. Diese zusammengesetzte Fläche wird c_{pq} ausser in α auch in Punkten schneiden, die auf einer F_{s-r} liegen; und, da F_{s-r} durch alle die Schnittpunkte von P und c_{pq} geht, liegen, wenn der oben angeführte Satz richtig ist, ihre übrigen Schnittpunkte auf einer F_{s-r-1}. Hierdurch ist aber bewiesen, dass unter der gemachten Voraussetzung der Satz für $s - 1$ richtig ist, wenn er für s richtig ist, und wir wollen jetzt die Voraussetzung beweisen.

Nennt man α_t die Anzahl der Bedingungen, mit welchen es eqvivalent ist, dass eine F_t durch alle die Punkte β gehen soll, worin eine will-

kürliche Ebene P c_{pq} schneidet, während man die Anzahl willkürlicher Punkte von c_{pq}, durch welche man eine F_t legen kann, a_{tpq} nennt, sieht man aus den in 18) entwickelten Formeln, dass

$$a_{tpq} = a_{(t-1)pq} + a_t.$$

Diese Formel sagt aber aus, dass eine F_t, welche durch β geht, noch durch eben so viele willkürliche Punkte von c_{pq} gelegt werden kann wie eine F_{t-1}, und also dass eine F_t, welche durch β geht, c_{pq} noch in Punkten schneiden wird, die auf einer F_{t-1} liegen.

37) Aus 36) folgt die Residualtheorie für vollständige Durchschnittcurven.

Indem dieselben Voraussetzungen wie in 36) von c_{pq}, F_p, F_q u. s. w. stattfinden, wollen wir beweisen:

Wenn eine Fläche F_r eine vollständige Durchschnittcurve c_{pq} in zwei Punktgruppen α und β schneidet, die zusammen das vollständige Schnittpunktsystem von F_r und c_{pq} bilden, und wir durch α eine F_s legen, die c_{pq} noch in der Gruppe γ schneidet, so schneidet eine neue Fläche s^{ter} Ordnung F'_s, welche durch γ geht, c_{pq} noch in einer Punktgruppe α', durch welche man eine Fläche r^{ter} Ordnung, F'_r, die durch β geht, legen kann.

Der Beweis wird dadurch geführt, dass F'_s und F_r zusammen eine F_{r+s} bilden, welche durch das vollständige Schnittpunktsystem α und γ von c_{pq} und F_s geht, und deren übrige Schnittpunkte mit c_{pq}, α' und β, also auf einer F'_r liegen müssen.

38) Man kann nun auch einen dem Riemann-Roch'schen Satz analogen Satz für vollständige Durchschnittcurven finden, den ich auch den Riemann-Roch'schen Satz nennen werde.

Wenn eine Fläche F_r eine vollständige Durchschnittcurve, c_{pq}, zweier Flächen F_p und F_q in zwei Punktgruppen schneidet, wovon die eine α fest ist, während die andere β, die von Q Punkten besteht, q' variable Punkte enthalten kann, geht eine F_{p+q-4} durch alle die Punkte β, wenn sie durch $Q - q'$ willkürliche Punkte unter ihnen gelegt wird.

Wir setzen voraus, dass $Q - q' < \frac{pq(p+q-4)}{2}$, und wollen später zeigen, dass dieses immer stattfinden muss, wenn β auf einer F_{p+q-4} liegen soll.

Wählen wir $(q' - 1)$ willkürliche feste Punkte γ auf c_{pq}, so bilden

die übrigen Punkte von jeder Gruppe β, welche γ enthält, eine Gruppe β' aus $Q - q' + 1$ Punkten bestehend, wovon ein Punkt P willkürlich gewählt werden kann.

Wenn man nun durch einen Punkt P von β', der nicht zu allen Gruppen β' gehört, eine Ebene E legt, und wenn man durch die übrigen $Q - q'$ Punkte β' eine F_{p+q-4} legt, bilden E und F_{p+q-4} zusammen eine F_{p+q-3}, die c_{pq} ausser in β' in einer Gruppe γ' schneidet. Der Residualtheorie zufolge muss nun jede F_{p+q-3}, die durch γ' geht, aus c_{pq} eine Gruppe β' ausschneiden.

γ' besteht theils aus den Punkten γ'', worin die Ebene E c_{pq} ausser in P schneidet, theils aus den Punkten γ''', worin F_{p+q-4} noch c_{pq} schneidet, ausser in den Punkten, wodurch sie gelegt ist. Nun muss jede F_{p+q-3}, die durch γ'' geht, auch durch P gehen, da γ'' und P zusammen das vollständige Schnittpunktsystem zweier ebenen Curven φ_p und φ_q bilden, und F_{p+q-3} E in einer φ_{p+q-3} schneidet, welche durch alle die Schnittpunkte von φ_p und φ_q P ausgenommen gelegt ist und also auch durch P gehen muss, da jede ebene Curve φ_{p+q-3} durch einen der Schnittpunkte von φ_p und φ_q gehen muss, weil sie durch die übrigen geht.

P muss also zu γ' oder zu jeder Gruppe β' gehören, und da es gegeben ist, dass er nicht zu jeder Gruppe β' gehört, muss er zu γ' gehören. Da nun P nicht zu den Punkten γ'' gehört, worin E c_{pq} schneidet, muss er zu γ''' gehören, und F_{p+q-4} also durch P gehen.

F_{p+q-4} muss also durch alle Punkte β' gehen. Da es aber in einer bestimmten Gruppe $\beta = \beta' + \gamma$ vollständig willkürlich ist, ob wir uns einen Punkt P von β' variabel denken und die Punkte von γ fest, oder ob wir uns P fest und einen Punkt P' von γ variabel denken, sehen wir, dass F_{p+q-4} auch durch einen willkürlichen Punkt von γ gehen muss, weil sie durch die $Q - q'$ Punkte β' geht, und also die ganze Gruppe β enthalten.

Wir wollen jetzt zeigen, dass man niemals $Q - q' > \frac{pq(p+q-4)}{2}$ haben kann, wenn β auf einer F_{p+q-4} liegen soll. Denn F_{p+q-4} schneidet c_{pq} noch in einer Gruppe δ, die aus $R = (p+q-4)pq - Q$ Punkten besteht. Es ist nun für F_{p+q-4} höchstens mit R Bedingungen eqvivalent durch δ gehen zu sollen, und da F_{p+q-4} im Ganzen durch $\frac{pq(p+q-4)}{2}$ willkürliche

Punkte von c_n gelegt werden kann, hat man also $q' \overline{\gtrless} \frac{pq(p+q-4)}{2} - R$, und da $Q = pq(p+q-4) - R$, $Q - q' \overline{\lessgtr} \frac{pq(p+q-4)}{2}$.

Wir haben bewiesen, dass F_{p+q-4} durch die ganze Gruppe β gehen muss, weil sie durch $Q - q'$ Punkte derselben gelegt wird, wir können aber auch zeigen, dass sie nicht durch die ganze Gruppe β zu gehen braucht, weil sie durch weniger als $Q - q'$ Punkte der β gelegt wird. Denn F_{p+q-4} schneidet c_{pq} noch in $R = (p+q-4)pq - Q$ Punkten γ, deren

$$r \overline{\gtrless} \frac{pq(p+q-4)}{2} - (Q - q')$$

willkürlich gewählt werden können, da es ja höchstens $Q - q'$ Bedingungen für F_{p+q-4} ist durch β zu gehen, und sie im Ganzen durch $\frac{pq(p+q-4)}{2}$ willkürliche Punkte von c_{pq} gelegt werden kann. Da aber die Gruppe γ r variable Punkte enthält, geht F_{p+q-4} hierdurch, wenn sie durch

$$R - r \overline{\lessgtr} pq(p+q-4) - Q - \left(\frac{pq(p+q-4)}{2} - (Q - q')\right)$$

oder

$$(1) \qquad R - r \overline{\lessgtr} \frac{pq(p+q-4)}{2} - q'$$

Punkte der γ gelegt wird. Eine F_{p+q-4}, die durch γ geht, schneidet also c_{pq} noch in einer Gruppe β, deren wenigstens

$$\frac{pq(p+q-4)}{2} - (R - r)$$

Punkte willkürlich gewählt werden können, und da wir wissen, dass nur q' Punkte β willkürlich gewählt werden können, müssen wir haben

$$(2) \qquad \frac{pq(p+q-4)}{2} - (R - r) \overline{\lessgtr} q',$$

und indem wir (1) und (2) vergleichen, sehen wir, dass

$$q' = \frac{pq(p+q-4)}{2} - (R - r).$$

Wenn nun c_{pq} h scheinbare Doppelpunkte hat, und wir

$$P = \frac{(pq-1)(pq-2)}{2} - h$$

setzen, haben wir

$$R - r = P - q' - 1$$

$$Q - q' = P - r - 1$$

$$R + Q = 2(P-1)$$

$$R - Q = 2(r - q').$$

Für das Folgende ist es wichtig zu bemerken, dass man diesen, so wie die vorhergehenden Sätze, verwenden kann, wenn c_{pq} eine auflösliche Curve ist.

38) Wir wollen jetzt unter eins die folgenden zwei Sätze beweisen:

1) Wenn zwei Flächen F_p und F_q einander in den unauflöslichen Curven c_n und c_{n_1} schneiden, wo $n + n_1 = pq$, muss eine F_{p+q-4} durch einen Schnittpunkt von c_n und c_{n_1} gehen, weil sie durch die übrigen geht.

2) Wenn c_n h scheinbare Doppelpunkte hat, sind $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h$ ihrer Schnittpunkte mit einer F_{p+q-4} durch die übrigen bestimmt, während $y_{p+q-4} = n(p+q-4) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ von diesen Schnittpunkten willkürlich gewählt werden können, indem dieselben Bedingungen wie im vorigen Satz stattfinden.

Wir nehmen an, dass c_{n_1} h' scheinbare Doppelpunkte hat. c_n und c_{n_1} schneiden einander in t Punkten, die t genannt werden, und wir haben

$$t = 2h - n(n - p - q + 1).\text{(}^1\text{)}$$

Setzen wir jetzt

$$n = mq + k \ (k < q), \ n_1 = pq - n = m_1 q + k_1 = (p - m - 1)q + (q - k),$$

sehen wir, da sowohl

$$p + q - 4 > m + q - 4$$

als

$$p + q - 4 > m_1 + q - 4,$$

(¹) Siehe z. B. SALMON: Geometry of three dimensions, third ed. p. 316.

35) zufolge, dass es für F_{p+q-4} höchstens mit

$$\left.\begin{array}{l} y_{p+q-4}+1=(p+q-4)n-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+h+1 \\ y'_{p+q-4}+1=(p+q-4)n_1-\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}+h'+1 \end{array}\right|$$

Bedingungen eqvivalent ist die Curve $\left.\begin{array}{l} c_n \\ c_{n_1}\end{array}\right\}$ enthalten zu sollen. Wir können also annehmen, dass es mit $\left.\begin{array}{l} y_{p+q-4}+1-\beta_1 \\ y'_{p+q-4}+1-\beta_2\end{array}\right\}$ Bedingungen für F_{p+q-4} eqvivalent ist $\left.\begin{array}{l} c_n \\ c_{n_1}\end{array}\right\}$ enthalten zu sollen, indem $\left.\begin{array}{l} \beta_1 \\ \beta_2\end{array}\right\} \gtreqless 0$.

Wir wollen jetzt eine F_{p+q-4} durch t legen und annehmen, dass sie durch x Punkte t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. F_{p+q-4} muss dann c_n enthalten, wenn sie noch durch $y_{p+q-4}+1-\beta_1-(t-x)$ willkürliche Punkte der c_n gelegt wird, und ebenso muss sie auch c_{n_1} enthalten, wenn sie noch durch $y'_{p+q-4}+1-\beta_2-(t-x)$ willkürliche Punkte der c_{n_1} gelegt wird. Da es nun (18)) für eine F_{p+q-4} mit $\frac{(p+q-4)pq}{2}+1$ Bedingungen eqvivalent ist die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q enthalten zu sollen, muss man haben

$$(y_{p+q-4}+1-\beta_1-(t-x))+(y'_{p+q-4}+1-\beta_2-(t-x))+t-x$$
$$=y_{p+q-4}+y'_{p+q-4}-\beta_1-\beta_2-t+x+2 \gtreqless \frac{(p+q-4)pq}{2}+1.$$

Nun hat man aber die Relation

$$h-h'=\frac{(n-n_1)(p-1)(q-1)}{2} \text{ [1]}$$

oder

$$\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}-h\right)-\left(\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}-h'\right)=\frac{(n-n_1)(p+q-4)}{2}$$

und also

$$y_{p+q-4}+y'_{p+q-4}-t=(p+q-4)pq-(n-1)(n-2)+2h$$
$$+\frac{(n-n_1)(p+q-4)}{2}-(2h-n(n-p-q+1))$$
$$=\frac{pq(p+q-4)}{2}-2.$$

[1] Siehe SALMON: Geometry of three dimensions, third ed. p. 315.

Daraus sieht man, dass

$$x - \beta_1 - \beta_2 \geqq 1, \qquad x \geqq \beta_1 + \beta_2 + 1.$$

Nehmen wir jetzt an, dass c_n auf einer Monoide M_m liegt, dann wissen wir (28)), dass die Punkte G_{p+q-4}, worin eine F_{p+q-4} c_n schneidet, auf einem Kegel $\varphi_{m+p+q-4}$, der durch h und h_1 geht, liegen, und dass (6)), wenn sich G_{p+q-4} in zwei Gruppen t und β theilt, ein φ_{n-3}, welcher durch h geht, durch β gehen wird, wenn er durch $Q - q'$ Punkte der β gelegt wird, indem β Q Punkte enthält, wovon q' willkürlich gewählt werden können.

Nun schneidet, wenn $h < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, eine F_{p+q-4}, welche durch t geht, c_n noch in einer Gruppe β aus $n(n-3) - 2h$ Punkten bestehend, von welchen $q' = y_{p+q-4} - \beta_1 - t + x = \frac{n(n-3)}{2} - h + x - \beta_1 - 1$ willkürlich gewählt werden können; denn aus dem Vorhergehenden sehen wir, dass eine F_{p+q-4}, die durch t geht, noch durch so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, und dass sie nicht, wenn $h < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, c_n enthalten muss, da $q' \geqq 0$, weil $x \geqq \beta_1 + 1$ und in diesem Fall

$$\frac{n(n-3)}{2} - h \geqq 0.$$

Ein φ_{n-3}, der durch h geht, geht also auch durch β, wenn er durch

$$n(n-3) - 2h - \left(\frac{n(n-3)}{2} - h - \beta_1 + x - 1\right) = \frac{n(n-3)}{2} - h + \beta_1 - x + 1$$

willkürliche Punkte der β geht. Nun müssen wir aber

$$\frac{n(n-3)}{2} - h + \beta_1 - x + 1 \geqq \frac{n(n-3)}{2} - h - \beta_1 + x - 1, \qquad x \leqq \beta_1 + 1$$

haben, weil sonst ein φ_{n-3}, der durch h geht, durch alle Punkte einer willkürlichen Gruppe β gehen müsste, weil sie durch eine geringere Anzahl unter ihnen ginge, als man willkürlich wählen könnte; was unmöglich ist.

Man hat also

$$x = \beta_1 + \beta_2 + 1$$

$$x \leqq \beta_1 + 1,$$

was nur stattfinden kann, wenn $\beta_2 = 0$, $x = \beta_1 + 1$.

Auf dieselbe Weise sehen wir, dass $\beta_1 = 0$.

Wenn $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, kann kein φ_{n-3} durch h gelegt werden; der Satz ist aber gleichwohl richtig. Wir haben in diesem Fall

$$t = (n-1)(n-2) - n(n-p-q+1) = n(p+q-4) + 2.$$

Wie vorher finden wir, dass

$$x \geqq 1 + \beta_1 + \beta_2 .$$

Wir können dann nicht $\beta_2 > 0$ haben, denn F_{p+q-4} muss c_n enthalten, wenn er durch t geht, und das wäre nicht nothwendig, wenn $\beta_2 > 0$, da F_{p+q-4} dann, ausserdem dass sie durch t ginge, durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - h - \beta_1 + x - 1 \geqq \frac{n(n-3)}{2} - h + \beta_2 \geqq 0$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden könnte. Wenn $h' < \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}$, sieht man wie vorher, dass $\beta_1 = 0$, und wenn $h' = \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}$, sieht man wie hier, dass $\beta_1 = 0$.

Wir haben jetzt den Satz in allen Fällen bewiesen, wenn man nur durch die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q eine F_{p+q-4} legen kann. Wir wollen jetzt sehen, ob der Satz (*1*) pag. 199 auch richtig ist, wenn dieses nicht der Fall ist.

Wir müssen dann

$$p + q - 4 < p$$

$$p + q - 4 < q$$

oder

$$q < 4$$

$$p < 4$$

haben. Den Fall wo $p \leqq 2$, $q \leqq 2$ können wir auslassen, da die Fläche F_{p+q-4} dann gar nicht existirt. Ebenso können wir den Fall $p = 3$, $q = 1$ auslassen. Wir müssen also entweder $p = 3$, $q = 3$ oder $p = 3$, $q = 2$ setzen.

Wenn $p = 3$, $q = 3$, ist $F_{p+q-4} = F_2$ und entweder n oder $n_1 \leq 4$, so dass wenigstens eine der Curven c_n oder c_{n_1} auf einer F_2 liegt. Es ist leicht zu zeigen, dass der Satz richtig ist.

Wenn $p = 3$, $q = 2$, kann n und n_1 die Werthe (1, 5), (2, 4), (3, 3) haben. Im ersten und zweiten Fall sieht man, dass der Satz richtig ist, dagegen sieht man, dass er im dritten Fall nicht richtig ist; denn F_{p+q-4} ist $= F_1$ und ist also eine Ebene, und die beiden Curven c_n und c_{n_1} sind Raumcurven 3ter Ordnung, die sich in 5 Punkten schneiden, und durch deren Schnittpunkte keine Ebene gelegt werden kann.

Wenn c_{n_1} eine zusammengesetzte Curve ist, müssen in allen Fällen

$$x \overline{\overline{<}} \beta_1 + 1, \qquad x \overline{\overline{>}} \beta_1 + \beta_2 + 1$$

richtig sein, und also $\beta_2 = 0$, $x = \beta_1 + 1$ sein, wenn nur c_n eine nicht auflösliche Curve ist, und kein Theil von c_{n_1} Doppelcurve auf den beiden Flächen F_p und F_q ist.

3) *Es ist also, wenn c_n unauflöslich ist und kein Theil von c_{n_1} Doppelcurve auf den beiden Flächen F_p und F_q ist, immer mit $y'_{p+q-4} + 1$ Bedingungen eqvivalent, dass eine F_{p+q-4} die c_n residuale Curve c_{n_1} enthalten soll,* und

4) *Eine F_{p+q-4}, die durch die Schnittpunkte zweier Curven c_n und c_{n_1} geht, schneidet immer c_n noch in einer Gruppe von $n(n-3) - 2h$ Punkten, wovon $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürlich gewählt werden können.*

Der letzte Satz wird dadurch bewiesen, dass F_{p+q-4} ausser durch t durch $y_{p+q-4} - \beta_1 - (t - x)$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann. Er ist auch in dem Fall richtig, wo Theile von c_{n_1} Doppelcurven auf den beiden Flächen F_p und F_q sind.(1)

---

(1) Da ich nicht sonst die Fälle behandele, wo Theile von c_{n_1} Doppelcurven auf den beiden Flächen F_p und F_q sind, werde ich nur in dieser Note den Beweis für die gemachte Behauptung führen. Ich nehme also an, dass der Beweis wie oben geführt ist für den Fall, wo kein Theil von c_{n_1} Doppelcurve auf den beiden Flächen F_p und F_q ist. Wenn nun r so gross ist, dass eine F_r, die durch c_n geht, durch keine Doppelcurve von F_q zu gehen bedarf, denken wir uns eine solche F_r durch c_n gelegt, und dass F_r noch F_q in $c_{n'}$, wovon kein Theil doppelt auf F_q ist, schneidet. Eine F_{q+r-4}, welche durch $c_{n'}$ geht, kann noch durch $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden. Wenn wir nun aber statt $c_{n'}$ eine Curve setzen, die aus c_{n_1} und einer willkürlichen vollständigen Durchschnittcurve $c_{(r-p)q}$ von F_q und einer F_{r-p} besteht, sieht man, dass eine F_{r+q-4}, welche hierdurch geht, wenigstens durch $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt

39) Indem wir stets voraussetzen, dass kein Theil von c_n oder c_{n_1} Doppelcurve auf den beiden Flächen F_p und F_q ist, und dass c_n und c_{n_1} zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_q und F_p bilden, werden wir entwickeln, wie die Anzahlen von willkürlichen Punkten in mehreren Punktgruppen auf c_n und c_{n_1} von einander abhängen.

Erstens wollen wir eine Beziehung zwischen den Zahlen y_{p+q-4} und y'_{p+q-4} entwickeln, wenn $\begin{cases} y_{p+q-4} \\ y'_{p+q-4} \end{cases}$ angeben, durch wie viele willkürliche Punkte das vollständige Schnittpunktsystem von $\begin{cases} c_n \\ c_{n_1} \end{cases}$ und F_{p+q-4} bestimmt ist.

Die Curven c_n und c_{n_1} können zusammengesetzt oder unauflöslich sein, wie auch Theile von ihnen mehrfach auf einer der Flächen F_p oder F_q sein können.

F_{p+q-4} kann im Ganzen durch $\frac{pq(p+q-4)}{2}$ willkürliche Punkte von c_{pq}, die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q, gelegt werden. Wenn also die Schnittpunkte von F_{p+q-4} und c_n bestimmt sind, kann F_{p+q-4} noch durch

$$\frac{pq(p+q-4)}{2} - y_{p+q-4}$$

willkürliche Punkte von c_{n_1} gelegt werden. F_{p+q-4} schneidet also auf c_{n_1} eine Punktgruppe α aus, die aus $n_1(p+q-4)$ Punkten besteht, von welchen $\frac{pq(p+q-4)}{2} - y_{p+q-4}$ willkürlich gewählt werden können. Aus 37) folgt aber, dass eine F_{p+q-4} durch die ganze Gruppe α gehen muss, wenn sie durch

$$n_1(p+q-4) - \left(\frac{pq(p+q-4)}{2} - y_{p+q-4}\right)$$

willkürliche Punkte der α geht.

---

werden kann. Da aber eine F_{r+q-4}, die durch $c_{(r-p)q}$ geht, F_q noch in einer Curve schneidet, durch welche man eine F_{p+q-4} legen kann, sieht man, dass auch eine F_{p+q-4}, die durch c_{n_1} geht, wenigstens noch durch $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, und dass also dasselbe für eine F_{p+q-4}, welche durch t geht, stattfinden muss. Wie vorher zeigt man, dass eine F_{p+q-4}, die durch t geht, nicht durch mehr als $\frac{n(n-3)}{2} - h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann.

Da α aber auch das vollständige Schnittpunktsystem von F_{p+q-4} und c_{n_1} ist, und die Schnittpunkte von c_{n_1} und F_{p+q-4} durch y'_{p+q-4} unter ihnen bestimmt sind, muss es für F_{p+q-4} mit y'_{p+q-4} Bedingungen eqvivalent sein durch α zu gehen, *und also hat man*

$$y'_{p+q-4} = n_1(p+q-4) - \left(\frac{pq(p+q-4)}{2} - y_{p+q-4}\right),$$

$$y'_{p+q-4} - y_{p+q-4} = \frac{(n_1-n)(p+q-4)}{2}.$$

Wenn wir annehmen, dass c_n und c_{n_1} beziehungsweise h und h' Doppelpunkte hat, und wir $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h$ und $\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - h'$ beziehungsweise das Geschlecht von c_n und c_{n_1} nennen und mit g und g' bezeichnen, haben wir

$$y'_{p+q-4} - y_{p+q-4} = g' - g.$$

Wenn c_n eine unauflösliche Curve ist, wissen wir, dass es für F_{p+q-4} mit $(p+q-4)n_1 - g' + 1$ Bedingungen eqvivalent ist c_{n_1} enthalten zu sollen, und wenn diese Zahl k grösser als y'_{p+q-4} ist, finden wir

$$y_{p+q-4} = (p+q-4)n - g - k + 1.$$

Wenn c_{n_1} nur aus Curven besteht, die einander schneiden, und von denen keine doppelt auf F_p oder F_q ist, ist es leicht zu sehen, dass $k = 1$, und also

$$y_{p+q-4} = (p+q-4)n - g.$$

Wenn k grösser als 1 sein soll, muss also c_{n_1} entweder aus mehreren Curven, die nicht einander schneiden, bestehen, oder c_{n_1} muss Theile enthalten, die doppelt auf einer der Flächen F_p oder F_q sind.

40) Wir haben schon früher die Bezeichnungen y_r und z_r gebraucht. y_r ist die Anzahl von willkürlichen Punkten auf c_n, durch welche man eine F_r legen kann. z_r ist die Anzahl von willkürlichen Punkten auf c_n, durch welche man eine φ_{m+r}, der durch h und h_1 geht, legen kann, indem man sich denkt, dass c_n auf einer M_m liegt.

Nennt man die Gruppen von nr beweglichen Punkten, worin F_r und φ_{m+r} c_n schneiden, G_r und H_r, weiss man, dass die Gruppen G_r zu den Gruppen H_r gehören, und dass die Gruppen G_r und H_r, wenn r zulänglich hoch, zusammenfallen.

Wenn $n = m_1 q + k$, und c_n auf einer unauflöslichen F_q liegt, wissen wir auch, dass

$$z_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn $r \gtreqless m_1 + q - 3$, und dass, wenn

$$\text{sowohl } r \gtreqless m_1 + q - 3 \text{ als } y_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

die Gruppen G_r und H_r zusammenfallen.

Da eine H_r aus einer willkürlichen H_s und einer willkürlichen H_{r-s} zusammengesetzt sein kann, wenn $s < r$, muss auch, wenn r zulänglich hoch, eine F_r, welche durch eine G_s geht, c_n noch in einer willkürlichen H_{r-s} schneiden können. Daraus sieht man, dass man die Gruppen H ganz unabhängig von den Monoiden, die durch c_n gehen, definiren kann. Im Folgenden werden die Bezeichnungen y_r, z_r, G_r, H_r immer dieselbe Bedeutung wie hier haben. Wir können jetzt die Residualtheorie auf Raumcurven übertragen, auch wenn sie nicht vollständige Durchschnittcurven sind, wenn nur die Zahlen r und r_1 so gross sind, dass G_r und H_r, G_{r_1} und H_{r_1} identisch sind. Unter dieser Voraussetzung hat man: Wenn durch eine Punktgruppe α, die auf c_n liegt, zwei Flächen F_r und F_{r_1} gehen, die c_n beziehungsweise in den Punktgruppen β und β_1 schneiden, und, wenn man durch β eine neue Fläche r^{ter} Ordnung F'_r, die c_n in α_1 schneidet, legt, kann man auch durch β_1 eine neue Fläche r_1^{ter} Ordnung F_{r_1}, die durch α_1 geht, legen.

Der Beweis wird ganz wie der für den analogen Satz von vollständigen Durchschnittcurven geführt. Fallen nur die Gruppen G_r und H_r zusammen, nicht aber die Gruppen G_{r_1} und H_{r_1}, kann man wohl durch jede neue Gruppe α_1, die von einer F'_{r_1} ausgeschnitten wird, eine F_r legen, nicht aber eine F'_{r_1} durch jede Gruppe α_1, die von einer F'_r ausgeschnitten wird.

41) Indem wir dieselben Bezeichnungen wie in 40) für die Zahlen und Gruppen, die zu c_n gehören, brauchen, und die entsprechenden Zahlen und Gruppen, die zu c_{n_1} gehören, y'_r, z'_r, G'_r, H'_r nennen, wollen wir zeigen, wie die Zahlen, die zu c_n gehören, von denen, die zu c_{n_1} gehören, abhängen.

Die vollständige Durchnittcurve zweier Flächen, F_p und F_q, wird c_{pq}

genannt, und die Anzahl willkürlicher Punkte auf c_{pq}, durch welche man eine F_r legen kann, wird a_{rpq} genannt.

Durch eine Gruppe G_r legen wir eine F_r. F_r wird dann c_{n_1} in einer Gruppe G'_r schneiden und kann noch durch $a_{rpq} - y_r$ willkürliche Punkte von c_{n_1} gelegt werden. Eine F_{p+q-4} wird dann (37)) durch G'_r gehen, wenn sie durch $n_1 r - a_{rpq} + y_r$ Punkte der G'_r geht. Nehmen wir jetzt an, dass c_n und c_{n_1} unauflöslich sind oder wenigstens nicht aus mehreren Curven, die doppelt auf einer der Flächen F_p oder F_q sind, oder die nicht einander schneiden, zusammengesetzt sind, wissen wir, dass eine F_{p+q-4} durch

$$y'_{p+q-4} = n_1(p+q-4) - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + h$$

willkürliche Punkte von $c_{n'}$ gelegt werden kann, und dass also F_{p+q-4}, ausserdem dass sie durch G'_r geht, noch durch eine willkürliche Gruppe $H'_{p+q-r-4}$ gelegt werden kann. Eine $H'_{p+q-r-4}$ ist aber durch $z'_{p+q-r-4}$ willkürliche Punkte bestimmt, und F_{p+q-4} kann, ausserdem dass sie durch G'_r geht, noch durch

$$y'_{p+q-4} - (n_1 r - a_{rpq} + y_r)$$

willkürliche Punkte von c_{n_1} gelegt werden, so dass

$$z'_{p+q-r-4} = y'_{p+q-4} - n_1 r + a_{rpq} - y_r.$$

Ebenso findet man entsprechende Formeln, indem man n und n_1, y und y', z und z' vertauscht.

42) Wir fragen jetzt, unter welchen Bedingungen

$$z_r > rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

ist? Wir nehmen an, dass p so hoch ist, dass c_{n_1} eine unauflösliche Curve ist.

Wir haben dann (41))

$$z_r = y_{p+q-4} - n(p+q-r-4) + a_{(p+q-r-4)pq} - y'_{p+q-r-4},$$

und also, wenn $z_r > rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$,

$$rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h < y_{p+q-4} - n(p+q-r-4) + a_{(p+q-r-4)pq} - y'_{p+q-r-4}$$

oder

$$a_{(p+q-r-4)pq} - y'_{p+q-r-4} > 0.$$

Nun ist es mit $y'_{p+q-r-4} + 1$ Bedingungen eqvivalent, dass eine $F_{p+q-r-4}$ c_{n_1} enthalten soll, und mit $a_{(p+q-r-4)pq} + 1$ Bedingungen eqvivalent, dass eine $F_{p+q-r-4}$ c_{pq} enthalten soll.

Die Ungleichheit

$$a_{(p+q-r-4)pq} - y'_{p+q-r-4} > 0$$

oder

$$a_{(p+q-r-4)pq} + 1 > y'_{p+q-r-4} + 1$$

giebt also an, dass eine $F_{p+q-r-4}$ c_{n_1} enthalten kann ohne c_n zu enthalten, oder dass c_n mit einer $c_{n+(q-r-4)q}$ corresidual ist. Nun wissen wir, dass, wenn

$$z_r > rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wir durch die Doppelstrahlen aus einem willkürlichen Punkt einen ς_{n-r-3} legen können, oder dass c_n auf einer M_{n-r-3} liegt, die ihren Scheitel in einem willkürlichen Punkt hat.

Die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass c_n auf einer M_{n-r-3}, die ihren Scheitel in einem willkürlichen Punkt hat, liegen soll, ist also, dass c_n mit einer $c_{n+(q-r-4)q}$ corresidual ist, wenn c_n auf einer F_q liegt.

Wenn man also die niedrigste Ordnung der Curven kennt, die c_n corresidual sind, kennt man auch die niedrigste Ordnung der Monoide, die man durch c_n legen kann.

Man sieht auch umgekehrt, dass, wenn man den niedrigsten Werth der Ordnung der Monoide, die man durch eine Curve c_n legen kann, kennt, kennt man auch die niedrigste Ordnung der Monoide, die man durch eine willkürliche c_n corresiduale Curve legen kann. Man muss doch bemerken, dass wenn die Scheitel der Monoiden specielle Lagen bekommen, diese Sätze nicht immer gelten, indem dann die Doppelstrahlen mehr als zweifach werden können.

Wenn man $r = p$ setzt, giebt

$$a_{rpq} - y'_r$$

an, durch wie viele Punkte man eine c_n corresiduale Curve c'_n legen kann; nennen wir diese Zahl q_n, wenn die Curve c_n auf einer Fläche q^{ter} Ordnung liegt, hat man

$$q_n = z_{q-4} - \left((q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h\right).$$

Setzen wir $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h = p_1$, bekommen wir für $q = 4$

$$4_n = p_1.$$

Also wenn eine c_n auf einer F_4 liegt, kann man eine c_n corresiduale Curve c'_n durch p_1 willkürliche Punkte legen. Man kann aber zeigen, dass alle Curven, die durch Variation ihrer Constanten in c_n übergehen können, und die auf derselben F_q wie c_n liegen, c_n corresidual sind, wenn F_q keine mehrfachen Punkte hat.

Wenn c_n auf einer F_3 liegt, existirt keine H'_{q-4}, und z_{q-4} hat keinen Sinn. Man weiss aber, dass es mit

$$pn_1 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + h + 1$$

Bedingungen eqvivalent ist, dass F_p c_{n_1} enthalten soll, und da F_p im Ganzen durch $\frac{3p(p+1)}{2}$ willkürliche Punkte von F_3 gelegt werden kann, dass die c_n corresidualen Curven c'_n durch

$$3_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h + n - 1$$

willkürliche Punkte von F_3 gelegt werden können, oder, wenn ihr Geschlecht p_1 genannt wird, dass

$$3_n = p_1 + n - 1.$$

Auf dieselbe Weise bekommen wir

$$2_n = p_1 + 2n - 1.$$

Wir wissen, dass die ebenen Curven durch $\frac{n(n+3)}{2} - d$ willkürliche Punkte gelegt werden können, wenn d die Anzahl ihrer Doppelpunkte bezeichnet, n ihre Ordnung, und wir können also auch

$$1_n = p_1 + 3n - 1$$

schreiben. Wir sehen dann eine merkwürdige Analogie zwischen den Zahlen 1_n, 2_n, 3_n, und dass diese Analogie für 4_n aufhört.

43) Wir wollen jetzt die meisten dieser Resultate auf eine andere Weise ableiten, um dadurch eine Verification der gefundenen Resultate zu finden.

Wir nehmen also an, dass eine c_n auf einer F_q liegt, h scheinbare Doppelpunkte hat und unauflöslich ist, und dass F_q keine Doppelcurve hat. Weiter nehmen wir an, dass wir wissen, dass, wenn $p \geqq (n-2)$, es mit

$$pn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1$$

Bedingungen eqvivalent ist, dass F_n c_n enthalten soll.

Durch c_n legen wir eine F_p, die F_q noch in c_{n_1} schneidet.

Wenn r zulänglich hoch, wird die vollständige Durchschnittcurve c_{pq} von F_p und F_q vollständig bestimmt sein durch ihre Schnittpunkte mit c_{rq}, die vollständige Durchschnittcurve von F_q und F_r. Eine c_{n_1} residuale Curve c'_n ist dann durch ihre Schnittpunkte mit c_{rq} vollständig bestimmt, und dann wird nach 37) eine F_{r+q-4} durch die Schnittpunkte von c'_n und c_{rq} gehen, wenn sie durch $nr - q_n$ unter ihnen geht, indem c'_n durch q_n willkürliche Punkte von F_q oder c_{rq} gelegt werden kann.

Wenn nun $r > n-2$, schneidet F_{r+q-4} c_n noch in einer Gruppe H_{q-4}, worin z_{q-4} Punkte willkürlich gewählt werden können, und man hat, da F_{r+q-4} im Ganzen durch $(r+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann,

$$(r+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h = nr - q_n + z_{q-4}$$

oder

$$q_n = z_{q-4} - \left((q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h\right),$$

wie wir in 42) gefunden haben.

Legen wir durch c_{n_1} eine F_{p+r}, so schneidet F_{p+r} F_q noch in einer c_{n+rq}, die nicht aus mehreren Curven, die einander nicht schneiden, zusammengesetzt ist.

c_{rq+n} kann durch

$$q_{rq+n} = z''_{q-4} - \left((q-4)(rq+n) - \frac{(rq+n-1)(rq+n-2)}{2} + h''\right)$$

willkürliche Punkte von F_q gelegt werden, indem wir alle Zahlen und Gruppen, die zu c_{rq+n} gehören, mit zwei Marken bezeichnen.

Wenn es nun mit v_{p+r} Bedingungen eqvivalent ist, dass F_{p+r} c_{n_1} enthalten soll, haben wir nun auch, wenn F_{p+r} im Ganzen durch $a_{(p+r)q}$ willkürliche Punkte von F_q gelegt werden kann,

$$a_{(p+r)q} - v_{p+r} = q_{rq+n}.$$

Wir wollen jetzt suchen, wie gross z''_{q-4} ist, wenn $r \leqq q-4$.

Wenn F_{p_1+q-4} $(p_1 > n + rq - 2)$ durch das vollständige Schnittpunktsystem einer F_{p_1} und einer c_{n+rq} geht, giebt $z''_{q-4}+1$ an, mit wie vielen Bedingungen es eqvivalent ist, dass eine solche F_{p_1+q-4} c_{n+rq} enthalten soll. Nun kann eine c_{n+rq} aus c_n und einer vollständigen Durchschnittcurve c_{qr} von F_q und F_r zusammengesetzt sein. Da eine F_{p_1+q-4}, welche durch das vollständige Schnittpunktsystem einer solchen c_{n+rq} und einer F_{p_1} geht, c_{qr} noch in einem vollständigen Schnittpunktsystem α mit einer F_{q-4} schneidet, und da α ein vollständig willkürliches Schnittpunktsystem von c_{qr} und einer F_{q-4} sein kann, sieht man, dass es mit $a_{(q-4)rq}+1$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_{p_1+q-4} c_{rq} enthalten soll.

Wenn nun F_{p_1+q-4} c_{rq} enthält, schneidet sie F_q noch in einer $c_{(p_1+q-r-4)q}$, die auf einer $F_{p_1+q-r-4}$ liegt und durch das vollständige Schnittpunktsystem von c_n und F_{p_1} geht, und die nur diesen Bedingungen unterworfen ist. Eine solche $c_{(p_1+q-r-4)q}$ kann noch durch z_{q-r-4} willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, und es ist also noch mit $z_{q-r-4}+1$ Bedingungen eqvivalent, dass F_{p_1+q-4} c_n enthalten soll. Wir haben also

$$z''_{q-4} + 1 = (a_{(q-4)rq} + 1) + (z_{q-r-4} + 1),$$
$$z''_{q-4} = a_{(q-4)rq} + z_{q-r-4} + 1.$$

Da $h'' = h + nr(q-1) + \frac{q(q-1)r(r-1)}{2}$, finden wir nach einigen Berechnungen

$$(1) \qquad z_{q-r-4} + v_{p+r} = (p+q-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h - n(r+p) + a_{(r+p)pq} + 1.$$

Wenn $r > q-4$, findet man auf dieselbe Weise wie wenn $r \leqq q-4$, dass $z''_{q-4} = a_{(q-4)rq}$, indem F_{p_1+q-4} dann c_n enthalten muss, wenn sie c_{rq} enthält, und beim Ausrechnen finden wir

$$(2) \qquad v_{p+r} = (p+r)n_1 - \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + h' + 1.$$

Die hier gefundene Formel (1) ist mit der in 41) gefundenen Formel identisch, wenn man da $p+r$ statt r setzt und die Buchstaben y, z, n mit y', z', n_1 vertauscht, wenn c_{n_1} nicht aus Curven zusammengesetzt ist, die einander nicht schneiden, indem unter diesen Bedingungen $v_{p+r}=y'_{p+r}+1$. Dagegen sieht man, dass die Formel (1) hier nur für r positiv bewiesen ist, während die Formel in 41) immer richtig ist, wenn $p+r>0$. Andererseits gilt die Formel in 41) nicht, wenn c_{n_1} aus Curven zusammengesetzt ist, die einander nicht schneiden, während die Formel (1) auch in diesem Fall richtig ist.

Wenn $r=(q-4)$, giebt (1) einen neuen Beweis für den Satz 38) 3), während (2) nur eine leichte Folge aus dem Satz 38) 3) ist.

44) Wenn eine F_{p+q-4} durch die oft genannte Gruppe t geht, schneidet sie c_n noch in einer Punktgruppe G, die $n(n-3)-2h$ Punkte enthält, wovon $\frac{n(n-3)}{2}-h$ willkürlich gewählt werden können.

Ein φ_{n-3}, der durch die Doppelstrahlen h aus einem willkürlichen Punkt geht, wird G enthalten, wenn er durch $\frac{n(n-3)}{2}-h$ willkürliche Punkte der G geht. Nun schneidet φ_{n-3} c_n, ausser in den Punkten, die auf den Doppelstrahlen h liegen, in einer Punktgruppe H, die $n(n-3)-2h$ Punkte enthält, wovon $\frac{n(n-3)}{2}-h$ willkürlich gewählt werden können. Die Punktgruppen G und H sind also identisch, da jede Gruppe G zu den Gruppen H gehört, eben so viele Punkte wie H enthält und durch eben so viele willkürliche Punkte wie H bestimmt ist.

Wenn eine Punktgruppe H_r sich in zwei Gruppen α und β theilt, wovon β fest ist, α aber q willkürliche Punkte enthält, wird ein φ_{n-3}, der durch h geht, wenn α aus Q Punkten besteht, durch α gehen, wenn er durch $Q-q$ willkürliche Punkte der α geht.

Dieses kann man auch so ausdrücken: eine Gruppe H wird alle Punkte einer Gruppe α enthalten, wenn $Q-q$ willkürliche Punkte α zu H gehören. Da die Gruppen G und H identisch sind, muss aber dasselbe von G gelten, und man hat also den Satz:

Wenn eine Gruppe H_r aus zwei Gruppen α und β zusammengesetzt ist, und wenn β eine feste Gruppe ist, α aber q willkürliche Punkte enthalten kann, wird eine F_{p+q-4}, die durch t geht, wenn α Q Punkte enthält, durch

alle die Punkte α gehen, wenn sie durch $Q-q$ willkürliche Punkte unter ihnen geht.

Man kann aber auch diesen Satz direct beweisen, wenn man nur weiss, dass, wenn p zulänglich hoch, F_{p+q-4} durch einen Punkt von t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und dass man unter derselben Voraussetzung F_{p+q-4} durch $(p+q-4)n-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+h$ willkürliche Punkte von c_n legen kann und die Residualtheorie verwenden, wenn die Flächen, von denen die Rede ist, $(p+q-4)^{ter}$ oder höherer Ordnung sind. Zuerst kann man bemerken, dass, wenn t das Schnittpunktsystem der Curven c_n und c_{n_1}, die zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q bilden, ist, bildet t zusammen mit den Punkten a, worin eine willkürliche Ebene P c_n schneidet, das Schnittpunktsystem t_1 zweier Curven c_n und c_{n_1+q}, die zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_q und einer F_{p+1} bilden. Denn P schneidet F_q in einer ebenen Curve φ_q, und diese bildet mit c_n und c_{n_1} die vollständige Durchschnittcurve von F_q und einer F_{p+1}, die aus F_p und P besteht. Also muss eine F_{p+q-3} durch einen Punkt von t_1 gehen, weil sie durch die übrigen geht.

Indem wir dieselben Bezeichnungen wie im Vorhergehenden brauchen, sehen wir der Residualtheorie zufolge, dass eine willkürliche Gruppe α, wenn r_1 zulänglich hoch, durch eine F_{r_1}, die c_n noch in einer festen Gruppe β_1 schneidet, ausgeschnitten werden kann.

Wir nehmen zuerst an, dass $Q-q \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2}-h$, und denken uns eine Gruppe α, die noch aus $(Q-q)$ Punkten δ besteht, durch q willkürliche Punkte γ bestimmt. Durch einen Punkt P von γ legen wir eine Ebene E und durch δ eine F_{p+q-4}, die durch t geht, und nehmen an, dass p so gross ist, dass F_{p+q-4} durch einen Punkt von t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. Die Punkte, worin E und F_{p+q-4} noch c_n schneiden, nennen wir a_1 und b. Eine F_{r_1}, die durch γ mit Ausnahme von P geht, wird c_n noch in einer Gruppe α_1 schneiden, die aus $Q-q+1$ Punkten besteht, wovon einer willkürlich gewählt werden kann, und der Residualtheorie zufolge muss jede Gruppe α_1 durch eine F_{p+q-3}, die durch t, a_1 und b geht, ausgeschnitten werden, da F_{p+q-4} und E zusammen eine F_{p+q-3}, die durch eine α_1 geht, bilden.

Eine F_{p+q-3}, die durch t und a_1 geht, muss aber auch durch P gehen, da die Punkte b und die Punkte a, worin E c_n schneidet, eine Gruppe t_1 bilden, und F_{p+q-3} durch einen Punkt einer Gruppe t_1 gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. Dann muss P aber zu b gehören. Denn P muss entweder zu jeder Gruppe α_1 oder zu den festen Punkten, worin F_{p+q-3} c_n schneidet, gehören. Zu jeder Gruppe α_1 kann er nicht gehören, da nicht jede F_{r_1}, die durch β und γ mit Ausnahme von P gelegt ist, durch P gehen muss, da alle die Punkte γ willkürlich gewählt sind. Es ist gegeben, dass P nicht zu a_1 gehört, also muss er zu b gehören. Wir haben also bewiesen, dass F_{p+q-4} durch noch einen Punkt der Gruppe α gehen muss, weil sie durch $Q-q$ willkürliche Punkte dieser Gruppe geht, und wie in 37) beweisen wir, dass F_{p+q-4} durch alle die Punkte α gehen muss, und dass sie nicht nothwendig durch α gehen muss, weil sie durch eine geringere Anzahl als $Q-q$ willkürliche Punkte der α geht, ebenso wie, dass $Q-q$ nicht grösser als $\frac{n(n-3)}{2}-h$ sein kann, wenn α auf einer F_{p+q-4}, die durch t geht, liegen soll.

Wir haben jetzt den Beweis geführt, wenn $p+q-4$ so gross, dass F_{p+q-4} durch einen Punkt von t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht. Da aber eine F_{p_1+q-4}, die durch eine Gruppe t' geht, immer wenigstens noch durch $\frac{n(n+3)}{2}-h$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, (was man wie in 38) beweist), wenn t' eine ähnliche Bedeutung für F_{p_1+q-4} wie t für F_{p+q-4} hat, und da sie c_n, ausser in t', noch in $n(n-3)-2h$ Punkten G' schneidet, muss eine Gruppe G mit einer G' zusammenfallen, wenn $\frac{n(n-3)}{2}-h$ von den Punkten G' zu G gehören, und also müssen die Gruppen G und G' identisch sein.

45) Wir wollen jetzt suchen die Frage zu beantworten:

Wenn c_n und c_{n_1} zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q bilden, durch wie viele Punkte t_r der Schnittpunkte t von c_n und c_{n_1} muss dann eine $F_{p+q-r-4}$ gehen, weil sie durch die übrigen geht?

Nehmen wir erst an, dass $p+q-r-4$ so gross ist, dass die Schnittpunkte von $F_{p+q-r-4}$ und c_n durch

$$y_{p+q-r-4} = (p+q-r-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$$

unter ihnen bestimmt sind, und dass die Gruppen $H_{p+q-r-4}$ und $G_{p+q-r-4}$ identisch sind.

Wir denken uns eine $F_{p+q-r-4}$ durch t gelegt. Wenn $F_{p+q-r-4}$ nicht c_n enthalten muss, weil sie durch t geht, kann man durch die Schnittpunkte von c_n und $F_{p+q-r-4}$ eine F_{p+q-4} legen, die c_n noch in einer Gruppe H_r schneidet.

Umgekehrt sieht man, dass eine F_{p+q-4}, die durch eine H_r geht, c_n noch in einer Gruppe $G_{p+q-r-4}$ schneidet, so dass die nothwendige und zulängliche Bedingung dafür, dass man eine $F_{p+q-r-4}$ durch t legen kann, ohne dass sie daher c_n enthalten muss, ist: dass man durch eine Gruppe H_r eine F_{p+q-4}, die durch t geht, legen kann, ohne dass daher F_{p+q-4} c_n enthalten muss. Nun besteht H_r aus rn Punkten, von denen z_r willkürlich gewählt werden können, und 44) zufolge wird eine F_{p+q-4}, die durch t geht, durch H_r gehen, wenn sie durch $nr - z_r$ willkürliche Punkte der H_r geht, und

$$nr - z_r \leqq \frac{n(n-3)}{2} - h,$$

$$z_r > nr - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h.$$

In diesem Fall kann F_{p+q-4} noch durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, und da die Residualtheorie verwendet werden darf, kann eine $F_{p+q-r-4}$ durch eben so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden.

Da $F_{p+q-r-4}$ im Ganzen durch $y_{p+q-r-4}$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, und es mit $t - t_r$ Bedingungen eqvivalent ist, dass $F_{p+q-r-4}$ durch t gehen soll, hat man

$$y_{p+q-r-4} = \frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r + t - t_r$$

oder

$$t_r = z_r + 1.$$

z_r kann niemals kleiner als $nr - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$ sein, und wenn sie

diese Grösse hat, muss eine $F_{p+q-r-4}$ c_n enthalten, weil sie durch t geht, und man muss also

$$y_{p+q-r-4} + 1 = t - t_r, \qquad t_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1 = z_r + 1$$

haben.

Wir haben also den Satz:

Eine $F_{p+q-r-4}$ geht durch $z_r + 1$ Punkte von t, weil sie durch die übrigen geht, wenn $p + q - r - 4$ so gross ist, dass

$$y_{p+q-r-4} = n(p + q - r - 4) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

und die Gruppen $H_{p+q-r-4}$ und $G_{p+q-r-4}$ identisch sind.

Wir wollen jetzt zeigen, dass in allen Fällen, wenn man eine $F_{p+q-r-4}$ durch t legen kann,

$$t_r = (p + q - r - 4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h$$

$$- y_{p+q-r-4} + z_r + 1.$$

Erstens nehmen wir an, dass $z_r > rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, und wollen dann zeigen, dass $F_{p+q-r-4}$ durch t und $\frac{n(n-3)}{2} - rn - h + z_r$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten. Wie vorher finden wir, dass eine F_{p+q-4}, die durch alle Schnittpunkte einer $F_{p+q-r-4}$, die durch t geht, gelegt ist, noch durch eine willkürliche Gruppe H_r gelegt werden kann.

Umgekehrt weiss man aber nicht, dass eine F_{p+q-4}, die durch eine H_r und t geht, c_n ausser in H_r noch in einer $G_{p+q-r-4}$ schneiden muss; denn man darf die Residualtheorie nicht verwenden. Da es mit $nr - z_r$ Bedingungen eqvivalent ist (44)), dass eine F_{p+q-4}, die durch t geht, durch H_r gehen soll, und da eine F_{p+q-4}, die auch durch H_r geht, noch durch $\frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, kann eine $F_{p+q-r-4}$, die durch t geht, also höchstens durch $\frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, und man hat also

$$y_{p+q-r-4} - t + t_r \overline{\gtrless} \frac{n(n-3)}{2} - h - nr + z_r.$$

Nun haben wir in 41) gesehen, dass wenn c_n und $c_{n'_1}$ unauflösliche Curven sind, und zusammen die vollständige Durchschnittcurve von F_q und $F_{p'}$ bilden,

$$z_{p'+q-r-4} = y_{p'+q-4} - nr + a_{rp'q} - y'_r,$$

oder, wenn man r statt $p' + q - r - 4$ setzt,

$$z_r = y_{p'+q-4} - n(p' + q - r - 4) + a_{(p'+q-r-4)p'q} - y'_{p'+q-r-4},$$

indem wir die Grössen, die sich auf $c_{n'_1}$ beziehen, durch Marken bezeichnen. Man kann diese Formel auch so schreiben

$$a_{(p'+q-r-4)pq} - (y'_{p'+q-r-4} + 1) = z_r - \left(nr - \frac{n(n-3)}{2} + h\right),$$

wo $a_{(p'+q-r-4)pq} - (y'_{p'+q-r-4} + 1)$ ausdrückt, durch wie viele Punkte von c_n man eine $F_{p'+q-r-4}$, die $c_{n'_1}$ enthält, legen kann, ohne dass sie c_n enthalten muss, und wo die Gleichung ausserdem zeigt, dass eine $F_{p'+q-r-4}$ durch $c_{n'_1}$ gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten, da

$$z_r - \left(nr - \frac{n(n-3)}{2} + h\right) \geqq 0.$$

Indem wir $p' > p$ annehmen, kann $c_{n'_1}$, da man durch c_n eine F_p legen kann, aus c_n und der vollständigen Durchschnittcurve $c_{(p'-p)q}$ einer willkürlichen $F_{p'-p}$ und einer F_q zusammengesetzt sein.

Da eine $F_{p'+q-r-4}$, die durch $c_{(p'-p)q}$ geht, F_q noch in einer Curve $c_{(p+q-r-4)q}$, die auf einer $F_{p+q-r-4}$ liegt, schneidet, sieht man, dass man durch c_{n_1} eine $F_{p+q-r-4}$ legen kann, die noch durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - rn - h + z_r$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, ohne dass sie daher c_n enthalten muss. Eine $F_{p+q-r-4}$, die durch t geht, kann also, ohne c_n zu enthalten, wenigstens durch

$$\frac{n(n-3)}{2} - rn + z_r - h$$

willkürliche Punkte von c_n gelegt werden, und da sie auch höchstens durch so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann, kann sie

durch eben diese Anzahl willkürlicher Punkte von c_n gelegt werden, ohne dass sie c_n enthalten muss. Man hat also in diesem Fall,

$$\text{wenn } z_r > nr - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

$$y_{p+q-r-4} - t + t_r = \frac{n(n-3)}{2} - rn - h + z_r$$

oder

$$t_r = (p+q-r-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h - y_{p+q-r-4} + z_r + 1,$$

was wir beweisen wollten.

Wenn $z_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, kann keine $F_{p+q-r-4}$ durch t gelegt werden ohne c_n zu enthalten. Denn wenn p' zulänglich hoch, weiss man aus dem Vorhergehenden, dass keine $F_{p'+q-r-4}$ durch die Gruppe t' gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten, indem wir durch Marken die Grössen bezeichnen, die sich zu p' referiren. Nun kann aber t' aus t und dem Schnittpunktsystem α von einer $F_{p'-p}$ und c_n zusammengesetzt sein, und, wenn wir durch t eine $F_{p+q-r-4}$ legen könnten, die nicht c_n enthielte, könnte man durch eine solche t' eine $F_{p'+q-r-4}$, die nicht c_n enthielte, legen. Da dieses gegen unsere Voraussetzungen streiten würde, muss also, wenn $z_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$, eine $F_{p+q-r-4}$, die durch t geht, c_n enthalten, und wir haben also

$$t - t_r = y_{p+q-r-4} + 1$$

oder

$$t_r = (p+q-r-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h - y_{p+q-r-4} + z_r + 1,$$

so dass auch in diesem Fall der Satz bewiesen ist.

Man kann diese Sätze so zusammenfassen:

Wenn eine $F_{p+q-r-4}$ durch die Punkte geht, worin zwei Curven c_n und c_{n_1}, die zusammen die vollständige Durchschnittcurve zweier Flächen F_p und F_q bilden, einander schneiden, ist es immer mit

$$z_r - \left(nr - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h\right)$$

Bedingungen eqvivalent, dass $F_{p+q-r-4}$ c_n enthalten soll.

Diese Sätze haben viele Aehnlichkeit mit dem CAYLEY'schen Satz von ebenen Curven, namentlich, wenn

$$z_r = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{2} - 1$$

und

$$y_{p+q-r-4} = (p+q-r-4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

ein Fall, der oft eintrifft, wenn r sehr niedrig; denn dann hat man

$$t_r = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}.$$

und dieser Satz ist dem CAYLEY'schen Satz ganz analog.

46) Ehe ich weiter gehe, will ich zeigen, wie man die in diesem Abschnitte gefundenen Sätze naturgemäss entwickeln kann, ohne die Theorie der Monoiden zu benutzen.

Erst kann man die Residualtheorie und den RIEMANN-ROCH'schen Satz für vollständige Durchschnittcurven entwickeln, wie es hier in 37) und 38) gethan ist.

Darnach kann man den Satz 39), dass

(1) $$y_{p+q-4} - y'_{p+q-4} = \frac{(n-n_1)(p+q-4)}{2},$$

entwickeln.

Indem wir hier $p+1$ statt p setzen, haben wir

(2) $$y_{p+q-3} - y''_{p+q-3} = \frac{(n-n_1-q)(p+q-3)}{2},$$

wo y''_{p+q-3} sich zu der Curve c_{n_1+q}, worin eine F_{p+1}, die durch c_n geht, noch F_q schneidet, referirt.

Wenn nun c_{n_1} nicht aus mehreren Curven, die einander nicht schneiden, besteht, geben aber

$$a_{(p+q-4)q} - (y'_{p+q-4} + 1)$$

und

$$a_{(p+q-3)q} - (y''_{p+q-3} + 1)$$

beide an, durch wie viele Punkte von F_q man die sowohl der c_{n_1} wie der c_{n_1+q} residuale Curve $c_{n+(q-4)q}$ legen kann, indem wir durch a_{rq} die Anzahl

der willkürlichen Punkte auf F_q bezeichnen, durch welche die vollständige Durchschnittcurve von F_p und F_q bestimmt ist.

Wir müssen also

$$(3) \qquad a_{(p+q-4)q} - y'_{p+q-4} = a_{(p+q-3)q} - y''_{p+q-3}$$

haben.

Indem wir (1), (2), (3) combiniren, finden wir

$$y_{p+q-3} = y_{p+q-4} + n$$

und also

$$(4) \qquad y_{p+q+r-4} = y_{p+q-4} + rn.$$

Mit Hülfe der Gleichung (4) ist es möglich die Residualtheorie für Raumcurven zu entwickeln, indem die Flächen, von denen in dieser Theorie die Rede ist, doch $(p+q-4)^{ter}$ oder höherer Ordnung sein müssen.

Wenn eine Fläche F_r niedrigerer Ordnung als $(p+q-4)$ ist, kann man doch zeigen, dass wenn zwei Flächen F_r und $F_{p+q+s-4}$ $(s \overline{\overline{>}} 0)$ durch eine Punktgruppe α auf c_n gehen und c_n noch in den Gruppen β und γ schneiden, kann man durch jede Gruppe α', die durch eine F_r, welche durch β geht, ausgeschnitten wird, eine $F_{p+q+s-4}$ legen.

Aus der Residualtheorie folgt:

(5) *Wenn eine $F_{p+q+s-4}$ $(s \overline{\overline{>}} 0)$ durch einen Punkt einer Punktgruppe α, die auf c_n liegt, gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, und eine $F_{p+q+r-4}$ $(r \overline{\overline{>}} 0)$ c_n in einer festen Punktgruppe β schneidet, während die übrigen Schnittpunkte von c_n und $F_{p+q+r-4}$ eine Gruppe γ bilden, die aus Q Punkten, wovon q' willkürlich gewählt werden können, besteht, wird eine $F_{p+q+s-4}$, die durch α geht, durch alle Punkte γ gehen, wenn sie durch $Q-q'$ willkürliche Punkte unter ihnen geht.*

Dagegen kann man noch nicht zeigen, dass es für $F_{p+q+s-4}$ nicht mit weniger als $Q-q'$ Bedingungen eqvivalent ist durch γ gehen zu sollen, wenn $F_{p+q+s-4}$ nur durch einen Punkt von α gehen muss, weil sie durch die übrigen Punkte α geht.

Darnach werde ich zeigen, dass, wenn r zulänglich gross, F_r noch durch $y_r - t$ willkürliche Punkte von c_n gelegt werden kann ohne c_n zu enthalten, wenn F_r c_{n_1} enthält.

Denn legen wir durch c_{n_1} eine F_{r_1}, wo r_1 so gross ist, dass F_{r_1} nicht c_n enthalten muss, weil sie durch c_{n_1} geht, dann ist es leicht zu sehen, dass wir uns r so gross denken können, dass F_r durch keinen Punkt von α, worin F_{r_1} c_n ausser in t schneidet, gehen muss, weil sie durch c_{n_1} und die übrigen Punkte α geht. Es ist also für F_r mit $r_1 n - t$ Bedingungen eqvivalent durch α gehen zu sollen.

Wenn $r - r_1$ zulänglich gross, und in allen Fällen $r - r_1 \overline{\overline{>}} p + q - 4$, sehen wir weiter, dass die $(r - r_1)n$ Punkte β, worin F_r c_n ausser in t und α schneidet, auf einer F_{r-r_1} liegen müssen, und dass diese F_{r-r_1} vollständig willkürlich sein kann, da eine F_{r_1}, die durch c_{n_1} geht, zusammen mit einer willkürlichen F_{r-r_1} eine F_r bildet. Wir sehen also, dass die Schnittpunkte von F_r und c_n durch

$$r_1 n - t + y_{r_1 \ r}$$

Bedingungen bestimmt sind, oder dass man eine so grosse Anzahl unter ihnen willkürlich wählen kann. Nach (4) haben wir aber

$$y_{r-r_1} + r_1 n = y_r$$

und sehen also, dass man $y_r - t$ der Schnittpunkte von F_r und c_n willkürlich wählen kann.

Da es mit $y'_r + 1$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_r c_{n_1} enthalten soll, und da es mit $y_r - t + 1$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_r noch c_n enthalten soll, ist es also mit $y_r + y'_r - t + 2$ Bedingungen eqvivalent, dass F_r sowohl c_n wie c_{n_1} enthalten soll. Da aber c_n und c_{n_1} zusammen die vollständige Durchschnittcurve c_{pq} einer F_p und einer F_q bilden, und wir wissen, dass es mit $rpq - \frac{pq(p+q-4)}{2}$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_r c_{pq} enthalten soll, hat man

$$y_r + y'_r - t + 2 = rpq - \frac{pq(p+q-4)}{2},$$

und da

$$y_r = (r - (p+q-4))n + y_{p+q-4}$$

$$y'_r = (r - (p+q-4))n_1 + y'_{p+q-4},$$

ist also

$$y_{p+q-4} + y'_{p+q-4} - t + 2 = \frac{pq(p+q-4)}{2};$$

da ferner

$$y_{p+q-4} - y'_{p+q-4} = \frac{(n - n_1)(p + q - 4)}{2},$$

wird endlich

$$y_{p+q-4} = (p + q - 4)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

$$y'_{p+q-4} = (p + q - 4)n_1 - \frac{(n_1 - 1)(n_1 - 2)}{2} + h'.$$

Man sieht, dass wenn wir noch beweisen können, dass F_{p+q-4} durch einen Punkt von t gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, haben wir das Material dazu alle die Sätze zu entwickeln, die in diesem Abschnitt entwickelt sind.

Dieses ist aber leicht zu zeigen. Denn nehmen wir an, dass es mit $(t - x)$ Bedingungen eqvivalent ist, dass F_{p+q-4} durch t gehen soll, dann sehen wir, wie in 38), dass

$$(y_{p+q-4} + 1) + (y'_{p+q-4} + 1) - t + x \geqq \frac{pq(p + q - 4)}{2} + 1,$$

und indem wir die Werthe von y_{p+q-4} und y'_{p+q-4} einsetzen, dass $x \geqq 1$. Indem wir den Satz (5) brauchen, ist es aber leicht zu zeigen, auf ähnliche Weise wie wir es in 38) durch Anwendung des Riemann-Roch'schen Satzes gethan haben, dass $x = 1$.[1]

47) Zum Schlusse werde ich einige Formeln angeben, die den Formeln 31) analog sind und angeben, mit wie vielen Bedingungen es höchstens eqvivalent ist, dass eine F_p die Raumcurve c_n enthalten soll, wenn man nur von c_n weiss, dass sie auf einer unauflöslichen F_q liegt und h scheinbare Doppelpunkte hat.

Wir haben schon gezeigt (32)), dass, wenn $n = mq + k$ $(q > k)$, ist

$$z_r = rn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h,$$

wenn zugleich

r [illegible] $m + q - 3$,

und da wir wissen, dass

$$y_r \leqq z_r,$$

haben wir den Satz:[2]

[1] Vgl. mit den Sätzen 38)—46) Noethers Abhandlung, Math. Ann. Bd. VIII, p. 510.

[2] Der Satz ist in 35) bewiesen, hier zum Vergleich mit dem Folgenden wiederholt.

(1) *Wenn* $b_p = np - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right)$ *gesetzt wird,* $n = mq + k$ $(q > k)$, *und wir annehmen, dass* c_n *auf einer Fläche* q^{ter} *Ordnung liegt, wird es, wenn* $p > m + q - 4$, *für eine Fläche* p^{ter} *Ordnung mit höchstens* $b_p + 1$ *Bedingungen eqvivalent sein* c_n *enthalten zu sollen.*

Wenn wir eine F_p durch alle die Punkte α legen, worin eine Ebene P c_n schneidet, kann sie wenigstens durch eben so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden wie eine F_{p-1}. Ist es nun mit α_p Bedingungen eqvivalent, dass F_p durch α gehen soll, haben wir

$$y_p \overline{\overline{>}} y_{p-1} + \alpha_p$$

$$y_{p-1} \overline{\overline{<}} y_p - \alpha_p .$$

Setzen wir jetzt für α_p eine Grösse β_p, die gleich oder kleiner als α_p ist, haben wir ebenfalls

$$y_{p-1} \overline{\overline{<}} y_p - \beta_p .$$

Nun wissen wir aber (11)), dass wenn

$$m + q - 3 \geqq p \geqq m + 1,$$

kann F_p nicht durch mehr als

$$\frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1)$$

unter den Punkten gehen müssen, worin eine Ebene c_n schneidet, weil F_p durch die übrigen geht, indem $\varepsilon = \begin{cases}1\\0\end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \gtrless 0$, und $m > q$. Es muss also in allen Fällen wenigstens

$$n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1)$$

Bedingungen für F_p sein durch die Punkte, worin eine Ebene c_n schneidet, gehen zu sollen. Wir können also diese Grösse für β_p setzen, und haben also

$$y_{p-1} \overline{\overline{<}} y_p - \left(n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1)\right),$$

indem $p \overline{\overline{<}} q + m - 3$.

Man sieht, dass

$$y_{p-r} \overline{\overline{<}} y_p - a_p - a_{p-1} \cdot \cdot \cdot \cdot a_{p-r+1}$$

und also, da

$$y_{m+q-3} \overline{\overline{<}} (m+q-3)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h = b_{m+q-3},$$

$$y_p \overline{\overline{<}} b_{m+q-3} - \sum_{p+1}^{m+q-3} \left(n - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} - \varepsilon(m+k-p-1)\right)$$

$$= b_p + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6} +$$

$$+ \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2},$$

wo $\varepsilon = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \gtrless 0$.

Für $q > m$ gilt diese Formel auch, wenn $m + q - 3 \geqq p \geqq q - 1$.

Wenn $m < p < q - 1$, wissen wir, dass eine Fläche F_p höchstens durch

$$m(q-p) + \frac{m(m-3)}{2} + \varepsilon(m+k-q-1)$$

der Punkte, worin eine Ebene e_n schneidet, gehen muss, weil sie durch die übrigen geht, so dass es also wenigstens

$$n - \left(m(q-p) + \frac{m(m-3)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1)\right)$$

Bedingungen für F_p sein muss durch eine solche Punktgruppe gehen zu sollen. Wir können also diese Grösse für β_p setzen. Diese Grösse kann aber auch als

$$n - \left(\frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)}{2} + \varepsilon(m+k-p-1) - \frac{(p-q+1)(p-q+2)}{2}\right)$$

geschrieben werden. Wir finden

$$-\sum_{p+1}^{q-1} \frac{(p-q+1)(p-q+2)}{2} = -\frac{(q-p-1)(q-p-2)(q-p-3)}{6}$$

und

$$y_p \gtreqless b_p + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon\frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2} - \frac{(q-p-1)(q-p-2)(q-p-3)}{6}.$$

Wir haben also den folgenden Satz:

(2) *Wenn eine Curve c_n auf einer unauflöslichen Fläche F_q liegt, und $n = mq + k$, $q > k$, ist es höchstens für eine F_p mit*

$$b_p + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon\frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2} + 1$$

Bedingungen eqvivalent, dass sie c_n enthalten soll, wenn $m > q$,

$$m + q - 3 > p \geqq m + 1.$$

Wenn $m < q$, ist es, wenn $m + q - 3 > p > q - 1$, höchstens mit eben so vielen Bedingungen eqvivalent, dass F_p c_n enthalten soll, und wenn $q > p \geqq m + 1$, wird es höchstens mit

$$b_p + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon\frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2} - \frac{(q-p-1)(q-p-2)(q-p-3)}{6} + 1$$

Bedingungen eqvivalent sein. b_p hat dieselbe Bedeutung wie in (1), und $\varepsilon = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \lesseqgtr 0$. Wenn $k = 0$, sieht man, dass die entwickelten Formeln auch für $p = m$ gelten.

48) Wir wollen nun die in 47) entwickelten Formeln dazu brauchen, zu suchen:

Wie niedrig kann man jedenfalls die Ordnung p einer F_p annehmen, wenn F_p durch eine c_n, die auf einer unauflöslichen F_q liegt, gehen soll?

Die Ordnung, die man durch diese Formeln findet, ist aber nicht immer die niedrigste, indem sie nur von h, n und q abhängen, während es noch andere Umstände giebt, die darauf Einwirkung haben. So z. B. wenn

$n = 8$, $h = 21$, $q = 4$, wird im Allgemeinen die niedrigste Ordnung von F_p 4 sein, in speciellen Fällen aber 3.

Wenn es höchstens d_p Bedingungen für F_p ist c_n enthalten zu sollen, und F_p durch a_{pq} willkürliche Punkte von F_q gelegt werden kann, wird F_p c_n enthalten können, wenn

$$a_{pq} - d_p \geqq 0,$$

ohne dass daher F_p F_q enthalten muss. Daher sieht man:

Wenn

$$p > m + q - 4,$$

wird man (47)) eine Fläche p^{ter} Ordnung durch c_n legen können, wenn:

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{qp(p-q+4)}{2} \geqq np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h + 1,$$

oder wenn

(1) $$h \overline{\overline{<}} \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2} - np + \frac{n(n-3)}{2}.$$

Wenn $m + q - 3 > p \geqq m + 1$, $m > q$, haben wir (47, (2)), dass c_n auf einer Fläche F_p liegen wird, wenn $m > q$ und

$$\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{qp(p-q+4)}{2} \geqq np - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$+ h + 1 + \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2}.$$

oder wenn

(2) $$h \leqq \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} + \frac{pq(p-q+4)}{2} - np$$

$$+ \frac{n(n-3)}{2} - \frac{(q+m-p-1)(q+m-p-2)(q+m-p-3)}{6}$$

$$- \varepsilon \frac{(m+k-p-1)(m+k-p-2)}{2}.$$

wo $\varepsilon = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, je nachdem $m + k - p - 1 \lesseqgtr 0$.

Die Formel (2) muss aber auch gelten, wenn $m < q$, indem, wenn $m + q - 3 > p \geqq q - 1$, der Ausdruck für die Anzahl willkürlicher

Punkte von F_q, durch welche F_p gelegt werden kann, und ebenfalls (47 (2)) der Ausdruck für die Anzahl der Bedingungen, die F_p höchstens erfüllen muss um c_n zu enthalten, derselbe wird für $m < q$, als für $m > q$, und wenn $m + 1 \overline{\overline{<}} p < q - 1$, zu beiden Grössen das Glied

$$-\frac{(q-p-1)(q-p-2)(q-p-3)}{6}$$

hinzukommt, welches also wegfällt, da es auf beiden Seiten des Ungleichheitszeichens vorkommt. Wie in 47) sieht man auch hier, dass die entwickelten Formeln, wenn $k = 0$, auch für $p = m$ gelten müssen.

49) Wir wollen jetzt auch die hier gefundenen Formeln dazu verwenden, den kleinsten Werth zu finden, den h haben kann, wenn c_n auf einer unauflöslichen Fläche F_q liegen soll.

Wenn

$$h \overline{\overline{<}} \frac{m(q-1)(qm-q+2k)}{2} + \varepsilon\frac{(k-2)(k-3)}{2},$$

wo $\varepsilon = 1$, wenn $k < 2$, sonst $= 0$ ist, sieht man (48 (2)), dass c_n auf einer F_{m+1} liegen muss, indem $n = mq + k$.

F_{m+1} schneidet noch F_q in einer Curve c_{q-p}, und wenn c_{q-p} h' scheinbare Doppelpunkte hat, hat man

$$h - h' = \frac{(n-q+k)m(q-1)}{2}.$$

Nun kann h' nicht kleiner als 0 sein, und also muss der kleinste Werth, den h haben kann

$$m_q = \frac{(n-q+k)m(q-1)}{2} = \frac{m(q-1)(qm-q+2k)}{2}$$

sein.

Wenn $h' = 0$, ist c_{n-q} eine ebene Curve, und wir haben also:

Wenn c_n auf einer Fläche q^{ter} Ordnung liegt und h seinen kleinsten Werth hat, kann man durch c_n eine F_{m+1} legen, die F_q noch in einer ebenen Curve schneidet.

Wir können auch m_q unter anderen Formen schreiben, wie

$$m_q = \frac{(q-1)(n-q+k)(n-k)}{2q} = \frac{(n-m-k)(n-q+k)}{2}.\ (^1)$$

(1) Vergl. mit 49) und 50) die Resultate, wozu Halphen gekommen ist: Comptes rendus, tom. 70, p. 380.

50) Bezeichnen wir mit m_q dasselbe wie in 49), sehen wir, dass

$$m_q = m_{m+1}.$$

Denn $n = (m+1)(q-1) + (m-q+k+1)$, so dass wir m_{m+1} bekommen, indem statt q $m+1$, statt m $q-1$, und statt k $(m-q+k+1)$ gesetzt wird, was m_q ungeändert lässt.

Wenn $q < r < m+1$, $n = mq + k$, müssen wir

$$m_q < m_r$$

haben; denn eine Curve c_n, die $h = m_r$ hat und auf einer unauflöslichen Fläche F_r liegt, muss auch auf einer Fläche F_{m_1+1} liegen, indem $n = rm_1 + k_1$; aber $m_1 < m$, so dass, wenn $h = m_r$ und c_n auf einer unauflöslichen F_r liegt, muss sie auch auf einer unauflöslichen F_{m+1} liegen, und da c_n nicht auf einer F_q liegen kann (sie müsste dann die Durchschnittcurve von F_q und F_r sein, was unmöglich ist, da $rq < n$), muss man $m_q < m_r$ haben.

Wenn durch eine unauflösliche c_n eine Fläche $(m+1)^{ter}$ oder niedrigerer Ordnung gelegt werden kann, sieht man hieraus, dass c_n auch auf einer Fläche q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegt, wenn $h \leqq m_q$.

Wenn man

$$(m+1)n < \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{6} - 1,$$

$$n < \frac{(m+1)^2 + 6(m+1) + 11}{6}$$

hat, sieht man, dass immer eine Fläche $(m+1)^{ter}$ oder niedrigerer Ordnung durch c_n gehen muss.

Aber auch in vielen Fällen wenn n grösser als diese Zahl ist, kann man zeigen, dass c_n immer auf einer Fläche q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegt, wenn $h \leqq m_q$.[1]

Wissen wir von einer Fläche F_r, dass ihre Schnittpunkte mit c_n durch $p_r - 1$ unter ihnen bestimmt sind, und dass es $n - \alpha_r$ Bedingungen für F_r ist, durch alle die Punkte, worin eine Ebene P c_n schneidet, gehen zu sollen, so muss F_{r-1} c_n enthalten, wenn sie durch $p_r - n + \alpha_r$ willkürliche Punkte von c_n gelegt wird; denn durch die Schnittpunkte von c_n und einer Fläche zusammengesetzt aus P und F_{r-1} kann immer eine F_r gelegt werden,

[1] Wahrscheinlich thut sie es immer.

von den Schnittpunkten von F_r und c_n, die nicht in P fallen, können aber $p_r - n + \alpha_r - 1$ willkürlich gewählt werden, und F_{r-1} kann also höchstens durch so viele willkürliche Punkte von c_n gelegt werden ohne c_n zu enthalten. Wir haben also

$$p_r - n + \alpha_r \overline{\overline{>}} p_{r-1}.$$

c_n muss auf einer F_r liegen, wenn

$$\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6} - 1 - p_r = u_r \geqq 0.$$

Wenn nun $n = mq + k$, $m > q > k$, $\alpha_r = 0$ für $r \overline{\overline{>}} m + q - 3$, und wenn für $m + q - 3 > r \geqq m + 1$

$$\alpha_r \overline{\overline{<}} \frac{(m+q-r-1)(m+q-r-2)}{2} + \varepsilon(k+m-r-1),$$

wo $\varepsilon = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, je nachdem $k + m - r - 1 \lesseqgtr 0$, sehen wir, da

$$p_r = n_r - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) + 1$$

wenn $r \overline{\overline{>}} n - 2$, und da

$$p_{r-k} \overline{\overline{<}} p_r - kn + \alpha_r + \alpha_{r-1} \cdots \alpha_{r-k+1},$$

dass, wenn die obengenannten Grössen für α_r gesetzt werden und $r < m + q - 3$,

$$p_r \overline{\overline{<}} nr - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) + 1$$

$$+ \sum_{r+1}^{m+q-3} \left(\frac{(m+q-r-1)(m+q-r-2)}{2} + \varepsilon(k+m-r-1)\right)$$

$$= nr - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - h\right) + 1$$

$$+ \frac{(m+q-r-1)(m+q-r-2)(m+q-r-3)}{6}$$

$$+ \varepsilon \frac{(k+m-r-1)(k+m-r-2)}{2},$$

wo $\varepsilon = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, je nachdem $k + m - r - 1 \lesseqgtr 0$.

Wenn $h \overline{\gtrless} m_q$, muss dann c_n auf einer F_{m+1} liegen, weil wir dann haben

$$u_{m+1} \leqq \frac{(m-q+2)(m-q+3)(m-q+4)}{6} + \varepsilon_1 \frac{(2-k)(3-k)}{2}$$

wo $\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, je nachdem $k \gtrless 2$.

Ist $k = 0$, kann man unter denselben Voraussetzungen auf dieselbe Weise sehen, dass c_n auf einer F_m liegen muss.

Aber dann sieht man aus den vorhergehenden Bemerkungen, dass unter denselben Voraussetzungen muss auch c_n auf einer Fläche q^{ter} Ordnung liegen.

Wenn also c_n nicht auf einer Fläche q^{ter} oder niedrigerer Ordnung liegen soll, müssen also wenigstens einige Grössen α_r grösser als hier angenommen sein.

Dann muss aber (15)) eine willkürliche Ebene c_n in Punkten schneiden, die auf einer ebenen Curve niedrigerer Ordnung als der q^{ten} liegen müssen.

Wir sehen also:

Wenn $h \leqq m_q$, *schneidet eine willkürliche Ebene* c_n *in Punkten, welche auf einer Curve* q^{ter} *oder niedrigerer Ordnung liegen.*

Wenn $h < m_3$, muss c_n, wenn sie existirt, immer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen.

Kopenhagen d. 10 März 1883.

D. 10 März habe ich von Herrn NOETHER eine Abhandlung »Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven» empfangen, habe aber darauf keine Rücksicht nehmen können in den hier veröffentlichten 4 Abschnitten, da sie von meiner Hand schon damals fertig waren. Dagegen hat die Abhandlung des Herrn NOETHER mich dazu veranlasst den 5ten Abschnitt meiner Abhandlung, »Von der Anzahl der Bedingungen, die eine Raumcurve erfüllen kann», vorläufig nicht zu veröffentlichen, indem die Resultate des Herrn NOETHER weiter gehend als die meinigen sind. Da aber eben hier noch viel zu thun übrig scheint, hoffe ich später die Resultate meiner weiteren Untersuchungen hierüber zu veröffentlichen.

Kopenhagen Mai 1883.

UEBER DIE TRANSCENDENTE FUNCTION

$$Q(x) = \Gamma(x) - P(x).$$

Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler

VON

HJALMAR MELLIN

IN HELSINGFORS.

Indem man das Verfahren, welches HERMITE in CRELLES Journal Bd. 90 verwendet hat um die von PRYM charakterisirte Function $Q(x)$ in der Form

$$Q(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{x-1}{\lambda} P(\lambda+1) R(x-1-\lambda) + \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{a^{x+\lambda}-1}{\underline{|\lambda}(x+\lambda)},$$

wo

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underline{|n}(x+n)}, \qquad R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(a+n)}(a+n)^x, \qquad a > 1,$$

auszudrücken, nur unbedeutend verändert, kann man jene Function durch eine einzige Reihe, die an Einfachheit dem ersten Theile des besprochenen Ausdruckes für $Q(x)$ gleichkommt, darstellen.

Von der Gleichung

$$Q(x) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n+1}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt$$

ausgehend, bringe ich durch die Substitution $t = n + 1 - \tau$ das Integral

$$-\int_{n+1}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt$$

auf die Form

$$-\int_{n+1}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt = e^{-(n+1)}(n+1)^{x-1} \int_0^1 e^{\tau}\left(1-\frac{\tau}{n+1}\right)^{x-1} d\tau$$

oder

$$-\int_{n+1}^{n} e^{-t} t^{x-1} dt = e^{-(n+1)}(n+1)^{x-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} A_{\lambda} \binom{x-1}{\lambda} (n+1)^{-\lambda},$$

wo

$$A_{\lambda} = \int_0^1 e^{\tau} \tau^{\lambda} d\tau.$$

Hieraus folgt

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+1)}(n+1)^{x-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} A_{\lambda} \binom{x-1}{\lambda} (n+1)^{-\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} A_{\lambda} \binom{x-1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+1)}(n+1)^{x-1-\lambda}.$$

Setzt man jetzt

$$R(x) = e^{-2}2^x + e^{-3}3^x + e^{-4}4^x + \cdots,$$

so kann man den letzten Ausdruck für $Q(x)$ auf folgende Weise schreiben

$$Q(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} A_{\lambda} \binom{x-1}{\lambda} R(x-1-\lambda).$$

Wie sich leicht ergiebt, konvergirt diese Reihe gleichmässig in jedem endlichen Gebiete der Veränderlichen x.

Die Grössen A_{λ}, von denen $A_0 = e - 1$ ist, lassen sich durch die Recursionsformel

$$A_{\lambda} + \lambda A_{\lambda-1} = e$$

berechnen.

SUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

PAR

M. ELLIOT,

à BESANÇON.

L'objet de ce travail est l'intégration d'une équation différentielle à coefficients doublement périodiques qui comprend comme cas particulier l'équation de LAMÉ. Dans une lettre adressée à M. HEINE, (¹) M. HERMITE, à qui l'on doit la solution complète de l'équation de LAMÉ, (²) en a achevé l'étude par l'examen du cas où le module est égal à l'unité, et a fait connaître en même temps trois équations linéaires qui ont pour intégrales des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. C'est l'une de ces équations dont je m'occupe ici; elle peut s'écrire

$$(1)\qquad \frac{d^2X}{dz^2} - 2m\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}\frac{dX}{dz} = [(n-m+1)(n+m)k^2\lambda^2(z) + h_1]X$$

m et n étant des entiers positifs, h_1 une constante quelconque, et $\lambda(z)$ la fonction elliptique au module k.

La propriété qu'ont en général deux des intégrales de cette équation d'être des fonctions de seconde espèce conduit naturellement à l'introduction de leurs dérivées logarithmiques qui sont des fonctions de première

(¹) Journal de Crelle, Tome 89.

(²) Annali di matematica, Serie II Tome IX et Comptes Rendus, Années 1877 et suivantes.

espèce, et à leur expression par les fonctions θ.(1) Mais on n'obtient ainsi que la forme des intégrales, et les arguments des fonctions θ qui restent inconnus doivent être déterminés par d'autres considérations. M. Fuchs a indiqué pour cet objet, et relativement à l'équation de Lamé, une méthode basée sur les résultats obtenus par lui dans un important mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre par des fonctions algébriques.(2) La transformée à laquelle donne lieu l'équation de Lamé, quand on change de variable indépendante en substituant la fonction $\lambda(z)$ à son argument, se trouve être ainsi un cas particulier d'une classe d'équations linéaires étudiées par M. Fuchs et dans les intégrales desquelles figureraient les fonctions θ abéliennes.

Lorsqu'on reste dans le domaine des fonctions doublement périodiques, on peut dans un assez grand nombre de cas arriver directement à la solution complète de la question en cherchant l'expression de la dérivée logarithmique au moyen de la fonction $\lambda(z)$ et de sa dérivée, sous la forme qui résulte du théorème bien connu de Liouville. C'est ce que je me suis proposé de montrer dans ce qui suit, en prenant comme exemple l'équation (1). La première partie contient la recherche de l'intégrale générale quand deux solutions sont des fonctions de seconde espèce. La deuxième est relative aux solutions doublement périodiques de première espèce. Dans la troisième, j'étudie les cas particuliers où le module est égal à l'unité ou à zéro en mettant à profit la forme analytique donnée par M. Hermite.

I.

1. En faisant disparaître de l'équation (1) le terme en $\frac{dX}{dz}$ par le procédé ordinaire qui consiste ici à prendre

$$X = [\lambda(z)]^m Y,$$

(1) Fuchs, Journal de M. Résal 1878.

(2) Journal de Crelle, Tome 81.

on ramène l'équation à celle-ci

$$\frac{d^2Y}{dz^2}=\left[n(n+1)k^2\lambda^2(z)+h+\frac{m(m+1)}{\lambda^2(z)}\right]Y, \tag{2}$$

où l'on a posé $h=h_1-m^2(k^2+1)$. Faisons maintenant dans l'équation (2) la substitution

$$y=-\frac{1}{Y}\frac{dY}{dz},$$

elle deviendra

$$\frac{dy}{dz}-y^2=-n(n+1)k^2\lambda^2(z)-h-\frac{m(m+1)}{\lambda^2(z)}. \tag{3}$$

La recherche des solutions doublement périodiques de seconde espèce pour les équations (2) ou (1) revient à celle des solutions de l'équation (3) qui sont des fonctions doublement périodiques admettant les deux périodes ω et ω' de la fonction $\lambda^2(z)$. On peut ajouter aussi, d'après le beau théorème de M. Picard, qu'elle revient en général à savoir dans quels cas les équations (1) ou (2) ont leurs intégrales uniformes.

Le second membre de l'équation (3) n'admet que les deux pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$ qui sont du second ordre avec les coefficients $-m(m+1)$ et $-n(n+1)$. On en conclut aisément que y doit admettre le pôle simple $z=0$ avec l'un des deux résidus m ou $-(m+1)$, le pôle simple $z=\frac{\omega'}{2}$ avec l'un des deux résidus n ou $-(n+1)$, et en outre d'autres pôles simples avec le résidu -1. Soit en effet $z=\alpha$ un infini de y, et admettons que $\frac{A}{(z-\alpha)^p}$ soit le premier terme du développement en série de y aux environs de $z=\alpha$. Si α est différent de 0 et de $\frac{\omega'}{2}$, la différence $\frac{dy}{dz}-y^2$ doit être finie pour $z=\alpha$. Or le terme qui a été écrit donne les deux suivants, $-\frac{Ap}{(z-\alpha)^{p+1}}$ et $-\frac{A^2}{(z-\alpha)^{2p}}$ entre lesquels il faut d'abord qu'il y ait réduction, d'où l'on conclut que p doit être égal à 1. Il faut ensuite que la constante A satisfasse à l'équation $A+A^2=0$, ce qui entraine la condition $A=-1$. Lorsque $\alpha=0$, on voit de la même façon que p doit encore être l'unité, et que l'on doit avoir

$A + A^2 = m(m+1)$, ce qui donne pour A l'une des valeurs m ou $-(m+1)$; et quand $\alpha = \frac{\omega'}{2}$, on trouve de même $p = 1$ avec l'une des valeurs n ou $-(n+1)$ pour A.

2. On conclut de ce qui précède trois formes possibles d'une intégrale doublement périodique pour l'équation (3). 1° Une fonction admettant les pôles simples 0 et $\frac{\omega'}{2}$ avec les résidus m et n. D'après une proposition fondamentale de la théorie des fonctions doublement périodiques, une telle fonction devra admettre en outre $m + n$ pôles simples avec le résidu -1. 2° Une fonction admettant les pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$ avec les résidus m et $-(n+1)$, qui devra admettre en outre $m - n - 1$ pôles simples de résidu -1. 3° Une fonction admettant les pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$ avec les résidus $-(m+1)$ et n, et en outre $n - m - 1$ pôles simples de résidu -1. Il est clair qu'on ne peut admettre l'existence des pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$ avec les résidus $-(m+1)$ et $-(n+1)$, ce qui serait inconciliable avec l'existence d'autres pôles dont les résidus doivent être tous négatifs.

Considérons la première forme qui, comme nous le verrons un peu plus loin, est la seule admissible. Posons $u = \lambda^2(z)$, $u_i = \lambda^2(z_i)$; la fonction

$$(4) \qquad -\frac{1}{2}\frac{du}{dz}\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{1}{u-u_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{\frac{du_i}{dz_i}}{u-u_i} + \frac{m}{2}\frac{\frac{du}{dz}}{u}$$

admet les $m + n$ pôles simples $z_1, z_2, \ldots z_{m+n}$ avec le résidu -1. Si dans cette même fonction, où les constantes $\frac{du_i}{dz_i}$ gardent la détermination qu'elles avaient d'abord, on remplace z par $-z_i$, les deux termes infinis se détruisent, et la fonction reste finie. Pour $z = 0$, le seul terme $\frac{1}{u}\frac{du}{dz}$ devient infini avec le résidu 2, et par suite la fonction devient infinie avec le résidu m. Pour $z = \frac{\omega'}{2}$, les termes $-\frac{1}{2}\frac{du}{dz}\frac{1}{u-u_i}$ deviennent tous infinis avec le résidu $+1$, et $\frac{1}{u}\frac{du}{dz}$ avec le résidu -2, en sorte que la fonction devient infinie avec un résidu égal à $m + n - m = n$. En se

rappelant la propriété fondamentale des fonctions uniformes doublement périodiques, savoir qu'une telle fonction se réduit à une constante quand elle ne devient plus infinie, on voit que l'expression (4) ne peut différer que par une constante de l'intégrale que nous cherchons pour l'équation (3). Or il est aisé de voir que cette constante est nulle.

3. Pour qu'une fonction doublement périodique y satisfasse à l'équation (3), il faut en effet que l'expression

$$\frac{dy}{dz} - y^2 + n(n+1)k^2\lambda^2(z) + h + \frac{m(m+1)}{\lambda^2(z)}$$

ne devienne plus infinie, et jusqu'à présent nous avons réalisé seulement pour cette fonction la propriété de ne présenter, dans les développements en série relatifs à ses différents pôles, aucun terme infini du second ordre. Soit aux environs d'un de ces pôles, $z = \zeta$

$$y = \frac{a}{z-\zeta} + b + \dots$$

La dérivée $\frac{dy}{dz}$ ne donne effectivement qu'un seul terme infini qui est du second ordre; mais le carré de y donne le terme $\frac{2ab}{z-\zeta}$ qui doit être nul. La constante a est égale à -1 pour les $m+n$ pôles z_i, en sorte que l'on doit avoir $b=0$. On arrive à la même conclusion pour les pôles 0 et $\frac{\omega'}{2}$, a ayant les valeurs m et n. Restreignons-nous à la considération du pôle $z = \frac{\omega'}{2}$. Les termes $-\frac{1}{2}\frac{\frac{du_i}{dz_i}}{u-u_i}$ s'annulent. L'expression $-\frac{1}{2}\frac{\frac{du}{dz}}{u-u_i}$ devient, en posant $z = \frac{\omega'}{2} + z'$,

$$\frac{\lambda'(z')}{\lambda(z') - k^2\lambda^2(z_i)\lambda^3(z')}$$

dont le développement ne contient pas évidemment de terme indépendant de z'. Il en est de même pour l'expression $\frac{m}{u}\frac{du}{dz}$. Donc il n'y a aucune constante à ajouter à l'expression déjà trouvée pour y.

4. Appelons $\varphi(u)$ le polynôme du degré $m+n$ dont les racines sont u_1, u_2, ... u_{m+n}; l'expression (4) prend la forme

$$y = -\frac{1}{2\varphi}\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dz} - \frac{1}{2}\frac{\psi}{\varphi} + \frac{m}{2u}\frac{du}{dz} \tag{5}$$

où ψ désigne un polynôme en u qui est au plus du degré $m+n-1$. Or nous pouvons déterminer immédiatement ce polynôme par cette seule remarque que la différence $\frac{dy}{dz} - y^2$ doit être rationnelle en u et ne pas contenir la première puissance de $\frac{du}{dz}$. Observant en effet que

$$\frac{du^2}{dz^2} = 4u(1-u)(1-k^2u)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 2[3k^2u^2 - 2(k^2+1)u + 1]$$

la différence $\frac{dy}{dz} - y^2$ donnera comme coefficient de $\frac{du}{dz}$

$$\frac{m}{2}\frac{\psi}{u\varphi} - \frac{1}{2\varphi}\frac{d\psi}{du}$$

et en l'égalant à zéro, on obtient la condition $\frac{d\psi}{\psi} = m\frac{du}{u}$, ou bien $\psi = Nu^m$, N étant une constante arbitraire.

Les considérations qui précèdent mettent en évidence l'impossibilité d'une intégrale répondant à la deuxième et à la troisième formes indiquées dans le n° 2. La fonction y relative à la deuxième hypothèse est en effet représentée par les formules (4) et (5), en supposant que le signe $\sum$ se rapporte seulement à $m-n-1$ quantités, et que les fonctions φ et ψ sont la première du degré $m-n-1$ et la seconde du degré $m-n-2$ au plus. La condition $\psi = Nu^m$ à laquelle on parvient de la même façon ne peut donc être remplie.

La troisième hypothèse conduit pour y aux expressions

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dz}\sum_{i=1}^{i=n-m-1}\frac{1}{u-u_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n-m-1}\frac{1}{u-u_i}\frac{du_i}{dz_i} - \frac{m+1}{2u}\frac{du}{dz}$$

$$-\frac{1}{2\varphi}\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dz}-\frac{1}{2}\frac{\psi}{\varphi}-\frac{m+1}{2u}\frac{du}{dz}$$

ψ étant un polynôme en u dont le degré est au plus $n-m-2$. Or en égalant à zéro le coefficient de $\frac{du}{dz}$ dans la différence $\frac{dy}{dz}-y^2$, on trouve la condition $\frac{d\psi}{\psi}+(m+1)\frac{du}{u}=0$ qui ne peut être satisfaite par un polynôme.

Ces impossibilités disparaissent lorsque $N=0$; mais cette circonstance sera examinée dans la deuxième partie.

5. Revenant à la première forme, l'expression de y pourra s'écrire, en posant $\frac{\varphi(u)}{u^m}=F(u)$

$$y=-\frac{1}{2F}\frac{dF}{du}\frac{du}{dz}-\frac{N}{2F}$$

et la substitution de cette valeur de y dans l'équation (3) donne

$$(\alpha)\quad \left|\begin{aligned}&\frac{dF^2}{du^2}\frac{du^2}{dz^2}-2F\left[\frac{d^2F}{du^2}\frac{du^2}{dz^2}+\frac{dF}{du}\frac{d^2u}{dz^2}\right]-N^2+\\&+4F^2\left[n(n+1)k^2u+h+\frac{m(m+1)}{u}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

La question est de satisfaire à cette équation en choisissant convenablement les coefficients du polynôme $\varphi(u)$. Or si l'on prend la dérivée par rapport à u du premier membre de l'équation (α) qui est rationnel en u, il se présente une simplification importante qui consiste en ce que la fonction $F(u)$ se met en facteur, et cette fonction se trouve alors assujettie à vérifier l'équation linéaire du troisième ordre

$$(\beta)\quad \left|\begin{aligned}&-2[k^2u^3-(k^2+1)u^2+u]\frac{d^3F}{du^3}-3[3k^2u^2-2(k^2+1)u+1]\frac{d^2F}{du^2}+\\&+\left[[2n(n+1)-6]k^2u+2(h+k^2+1)+\frac{2m(m+1)}{u}\right]\frac{dF}{du}+\\&+\left[n(n+1)k^2-\frac{m(m+1)}{u^2}\right]F=0\end{aligned}\right.$$

Soit maintenant

$$F(u) = u^n + A_{n-1}u^{n-1} + \ldots + A_0 + \frac{A_{-1}}{u} + \ldots + \frac{A_{-m}}{u^m}$$

où l'on peut choisir égal à l'unité le coefficient de u^n puisqu'il s'agit de satisfaire à une équation linéaire. Un calcul facile donne pour le coefficient de u^p après cette substitution

$$(\gamma)\quad \left|\begin{aligned} &(n-p)(n+p+1)(2p+1)k^2A_p + 2(p+1)[h + (p+1)^2(k^2+1)]A_{p+1} + \\ &\qquad + (2p+3)(m-p-1)(m+p+2)A_{p+2} \end{aligned}\right.$$

et cette expression donne lieu aux remarques suivantes.

1° Pour $p = n$ le coefficient de A_p étant nul, et les termes A_{n+1}, A_{n+2} n'existant pas, les termes du degré le plus élevé de l'équation (β) se détruisent d'eux-mêmes.

2° Pour $p = -m-2$ les termes A_p, A_{p+1} n'existent pas et le coefficient de A_{p+2} est nul; c'est à dire que les termes du degré négatif le plus élevé de l'équation (β) disparaissent.

3° Si l'on égale à zéro l'expression (γ), on aura successivement, en faisant $p = n-1,\ n-2,\ \ldots\ 0,\ -1,\ \ldots\ -m$, les coefficients de même indice en fonction des précédents qui seront connus, pourvu que le coefficient de A_p ne s'annule jamais, ce qui arrivera si le facteur $n + p + 1$ n'est jamais nul ou bien si $n + 1$ *est supérieur* à m, hypothèse que nous supposerons vérifiée dans tout ce qui suit.

4° Les coefficients A_{n-1}, A_{n-2}, $\ldots$ A_{-m} étant ainsi déterminés, il restera dans l'équation (β) des termes du degré $-m-1$. Il est facile de voir que leur coefficient est nul, en vertu des valeurs attribuées déjà aux A. En effet, s'il en était autrement, le premier membre de l'équation (β) se réduirait à $\frac{c}{u^{m+1}}$, c étant une constante différente de zéro, et le premier membre de l'équation (α) aurait pour dérivée le produit de ce terme par $F(u)$. Or cette dérivée contiendrait un terme en $\frac{1}{u}$, lequel ne peut exister dans la dérivée d'une fraction rationnelle. On obtiendrait effectivement un tel terme en multipliant par $\frac{c}{u^{m+1}}$ le terme en u^m de $F(u)$; mais il reste à prouver que son coefficient A_m n'est pas nul. Sup-

posant en effet $A_m = 0$, et faisant dans l'expression (γ) $p = m - 1$, on trouve $A_{m-1} = 0$. On en conclut immédiatement que tous les suivants $A_{m-2}, \ldots A_{-m}$ seraient aussi nuls; $F(u)$ serait alors divisible par u^{m+1} et l'équation (α) montre que l'on aurait $N = 0$, hypothèse que nous écartons pour le moment.

5° Il n'est pas sans intérêt de vérifier directement que la dernière équation se trouve être ainsi une conséquence des précédentes. On y parvient en se servant de la relation suivante entre les coefficients.

$$A_{-l} = \frac{(m-l+1)(m-l+2)\ldots(m+l)}{(n-l+1)(n-l+2)\ldots(n+l)}\frac{1}{k^{2l}}A_l \tag{6}$$

qui a lieu pour les valeurs entières de l non supérieures à m. On la vérifie sans difficulté au moyen de l'équation (γ), en établissant que si elle est vraie pour les valeurs entières $1, 2, \ldots l$, elle l'est encore pour $l + 1$. Cela étant, le coefficient de u^{-m-1} s'obtient en faisant $p = -m-1$ dans la relation (γ); il est égal à

$$-2m[(h + m^2(k^2+1))A_{-m} + (2m-1)A_{-m+1}]$$

ou en remplaçant au moyen de la relation (6) A_{-m} et A_{-m+1} en fonction de A_m et de A_{m-1}

$$-\frac{1.2\ldots 2m}{(n-m+1)\ldots(n+m)}\frac{1}{k^{2m}}[2m(h + m^2(k^2+1))A_m +$$

$$+ (n-m+1)(n+m)(2m-1)k^2A_{m-1}].$$

Or la quantité entre crochets est nulle, comme on le constate immédiatement en faisant $p = m - 1$ dans la relation (γ).

6. L'équation (β) étant vérifiée identiquement, le premier membre de l'équation (α) qui a une dérivée nulle se réduit à une constante. On pourra profiter de l'indétermination de N pour que cette constante soit nulle, et l'équation (α), à laquelle était ramené le problème, admettra comme solution la fraction rationnelle $F(u)$.

On aura en faisant dans l'équation (α) $u = 1$ pour déterminer la constante N.

$$N^2 = 4F(1)\{[n(n+1)k^2 + h + m(m+1)]F(1) - (k^2-1)F'(1)\}$$

Regardons N^2 comme une fonction de la constante h. La relation $(\gamma) = 0$ montre que A_{n-1} est du premier degré en h, A_{n-2} du second degré, ... A_0 du degré n. Mais à partir de là, les degrés vont en diminuant, comme l'indique la relation (6). On voit ainsi que N^2 est un polynôme en h du degré $2n + 1$.

Revenons actuellement à la fonction Y. On a en supposant N différent de zéro l'intégrale

$$Y = c\sqrt{F}e^{\frac{N}{2}\int\frac{dz}{F}}$$

où c est une constante arbitraire, et comme on trouve pour N deux valeurs, on obtiendra deux intégrales particulières. Le rapport de ces deux intégrales ne peut être une constante puisque les derivées logarithmiques sont évidemment distinctes. On connait ainsi l'intégrale générale de l'équation (2); mais on peut exprimer cette intégrale au moyen des fonctions θ, ce qui se fera maintenant sans difficulté.

7. Remarquons pour cela que l'on peut connaître les $m + n$ valeurs de la variable z pour lesquelles y devient infinie avec le résidu -1. Elles font partie en effet des $2(m + n)$ valeurs de z égales et de signes contraires que l'on obtient en égalant $F(u)$ à zéro. N étant supposé différent de zéro, nous savons déjà (N° 5, 4°) qu'aucune des valeurs de u ne peut être nulle. L'équation (α) où l'on remplace u par une des racines u_i de $F(u)$ donne

$$N = \pm 2F'(u_i)\sqrt{u_i(1 - u_i)(1 - k^2u_i)}$$

et montre que toutes les racines sont simples sans qu'aucune d'elles puisse être 1 ou $\frac{1}{k^2}$. Choisissons actuellement pour N une de ses deux déterminations. Les deux valeurs z_i et $-z_i$ qui répondent à la même valeur de u_i, abstraction faite des périodes, donnent à la dérivée $\frac{du}{dz}$ des valeurs égales et de signes contraires. Prenant celle de ces valeurs de z qui donne pour $2\frac{dF}{du}\frac{du}{dz}$ la détermination adoptée pour N, on aura une première série de $m + n$ valeurs de z que nous pouvons appeler maintenant $z_1, z_2, \ldots z_{m+n}$ et qui seront les pôles cherchés de la fonction y. La

seconde détermination de N donnerait lieu au choix des valeurs $-z_1$, $-z_2$, ... $-z_{m+n}$.

Considérons maintenant l'expression

$$(7) \qquad -\sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{\theta'_1(z-z_i)}{\theta_1(z-z_i)} + m\frac{\theta'_1(z)}{\theta_1(z)} + n\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} + c$$

Les propriétés des fonctions θ montrent que cette expression possède les deux périodes ω et ω' et qu'elle admet les $m+n$ pôles z_i avec le résidu -1, le pôle $z=0$ avec le résidu m, le pole $z=\frac{\omega'}{2}$ avec le résidu n. Elle ne diffère donc de y que par une constante. Pour trouver cette constante, comparons les termes indépendants de z, dans les développements en série relatifs au pôle $z=0$, de l'expression (7) et de la valeur (4) de y (N° 2). La première donne immédiatement

$$\sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{\theta'_1(z_i)}{\theta_1(z_i)} + c.$$

Quant à la seconde, observons que les $m+n$ premiers termes s'annulent pour $z=0$ avec $\frac{du}{dz}$; les $m+n$ suivants donnent

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dz_i} = \sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{\lambda'(z_i)}{\lambda(z_i)} = \sum_{i=1}^{i=m+n}\left[\frac{\theta'_1(z_i)}{\theta_1(z_i)} - \frac{\theta'(z_i)}{\theta(z_i)}\right]$$

Quant au terme $\frac{m}{2u}\frac{du}{dz} = m\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}$, il devient infini pour $z=0$, mais ne donne dans le développement aucun terme constant. On en conclut que y coïncidera avec la fonction (7), si l'on fait

$$c = -\sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{\theta'(z_i)}{\theta(z_i)}$$

et par suite en désignant par c_1 une constante arbitraire, on aura pour l'intégrale Y l'expression

$$Y = c_1 \frac{\theta_1(z-z_1)\theta_1(z-z_2)\ldots\theta_1(z-z_{m+n})}{[\theta_1(z)]^m[\theta(z)]^n} e^{-\sum_{i=1}^{i=m+n}\frac{\theta'(z_i)}{\theta(z_i)}}$$

On obtiendra une seconde intégrale en remplaçant les z_i par $-z_i$, ce qui revient, comme on voit, au changement de signe de la variable z. Quant à l'intégrale de l'équation (1) en X, on l'obtient en multipliant Y par $[\lambda(z)]^m$, ou à une constante près par $\left[\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}\right]^m$. Il suffira donc de remplacer θ_1 par θ dans le dénominateur de l'expression de Y.

Intégrales doublement périodiques.

II.

8. Supposons que l'on donne à h une des $2n+1$ valeurs qui annulent N. La valeur de y devient alors

$$y = -\frac{1}{2\varphi}\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dz} + \frac{m}{2u}\frac{du}{dz} \tag{8}$$

Les racines de $\varphi(u)$ répondant à des pôles de y dont le résidu est -1, on voit que toutes ces racines doivent être doubles, à moins qu'elles ne soient 0, 1 ou $\frac{1}{k^2}$; car alors les expressions

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dz} = 2\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}, \quad \frac{1}{u-1}\frac{du}{dz} = 2\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}, \quad \frac{1}{u-\frac{1}{k^2}}\frac{du}{dz} = 2\frac{\nu'(z)}{\nu(z)}$$

deviennent respectivement infinies du premier ordre avec le résidu 2, en sorte que les valeurs 1 et $\frac{1}{k^2}$, quand elles sont racines de $\varphi(u)$ ne peuvent être que des racines simples. Quant à la racine $u=0$, nous savons que le résidu correspondant de y doit être m ou $-(m+1)$, et en nous plaçant d'abord dans la première hypothèse, l'équation (8) montre que φ ne doit admettre aucune racine nulle. Il est facile de trouver les différentes formes dont est susceptible y, et par suite les intégrales X et Y des équations (1) et (2).

Si $m + n$ est pair, on peut d'abord composer $\varphi(u)$ avec $\frac{n+m}{2}$ racines doubles différentes de 1 et $\frac{1}{k^2}$; $\varphi(u)$ sera alors le carré d'un polynôme $\Phi_{\frac{n+m}{2}}(u)$ dont l'indice désigne le degré en $u = \lambda^2(z)$, en sorte que

$$y = -\frac{d}{dz}\log \Phi_{\frac{n+m}{2}}(u) + \frac{m}{2}\frac{d}{dz}\log u$$

et par suite

(a) $$Y = u^{-\frac{m}{2}}\Phi_{\frac{n+m}{2}}(u), \quad X = \Phi_{\frac{n+m}{2}}(u)$$

On peut aussi composer $\varphi(u)$ avec $\frac{n+m}{2} - 1$ racines doubles auxquelles on adjoint les racines simples 1 et $\frac{1}{k^2}$, ce qui donne

$$y = -\frac{d}{dz}\log \Phi_{\frac{n+m}{2}-1}(u) - \frac{d}{dz}\log \mu(z) - \frac{d}{dz}\log \nu(z) + \frac{m}{2}\frac{d}{dz}\log u$$

et par suite

(b) $$X = \Phi_{\frac{n+m}{2}-1}(u)\mu(z)\nu(z)$$

Lorsque $m + n$ est impair, il faut que $\varphi(u)$ ait $\frac{m+n-1}{2}$ racines doubles avec l'une des deux racines simples 1 ou $\frac{1}{k^2}$, ce qui donne pour X les deux formes

(c) $$X = \Phi_{\frac{n+m-1}{2}}(u)\mu(z)$$

(d) $$X = \Phi_{\frac{n+m-1}{2}}(u)\nu(z)$$

Examinons maintenant la seconde hypothèse où le résidu de y relatif au pôle $z = 0$ est $-(m + 1)$. Il faut évidemment que $\varphi(u)$ admette $2m + 1$ racines nulles, en sorte que $\varphi(u)$ sera le produit de u^{2m+1} par un polynôme en u du degré $n + m - 2m - 1 = n - m - 1$ lequel n'aura encore que des racines doubles avec l'adjonction possible des racines simples 1, $\frac{1}{k^2}$.

Si $n+m$ est pair, il faut donner à $\varphi(u)$ $\frac{n-m-2}{2}$ racines doubles avec l'une ou l'autre des racines simples $1, \frac{1}{k^2}$ et l'on a pour X

(e) $$X = u^{\frac{2m+1}{2}} \Phi_{\frac{n-m-2}{2}}(u)\mu(z)$$

(f) $$X = u^{\frac{2m+1}{2}} \Phi_{\frac{n-m-2}{2}}(u)\nu(z)$$

Si $n+m$ est impair, $\varphi(u)$ aura $\frac{n-m-1}{2}$ racines doubles, ou bien $\frac{n-m-3}{2}$ seulement avec les deux racines simples $1, \frac{1}{k^2}$, et nous avons pour X les formes suivantes

(g) $$X = u^{\frac{2m+1}{2}} \Phi_{\frac{n-m-1}{2}}(u)$$

(h) $$X = u^{\frac{2m+1}{2}} \Phi_{\frac{n-m-3}{2}}(u)\mu(z)\nu(z).$$

9. Les huit formes précédentes sont les seules possibles pour X. Nous allons voir que toutes répondent effectivement à des intégrales de l'équation (1) pour les diverses valeurs de h ou de h_1 qui satisfont à la condition $N=0$, en suivant la même marche que Lamé (1) dans le cas particulier de $m=0$.

Pour trouver les solutions de la forme (a), faisons dans l'équation (1) la substitution $u=\lambda^2(z)$; on obtiendra l'équation

(a') $$\left\{\begin{aligned} &[4k^2u^3 - 4(k^2+1)u^2 + 4u]\frac{d^2X}{du^2} + \\ &+ [2(3-2m)k^2u^2 + 4(m-1)(k^2+1)u + 2(1-2m)]\frac{dX}{du} - \\ &- [(n-m+1)(n+m)k^2u + h_1]X = 0 \end{aligned}\right.$$

(1) Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes, pages 281 et suivantes.

Substituons dans cette équation un polynôme en u dont le terme général est $A_p u^p$. On trouvera en égalant à zéro le coefficient de u^p

$$(\mathrm{a}'')\left|\begin{array}{l}(2p-m-n-2)(2p+n-m-1)k^2A_{p-1}+[4p(m-p)(k^2+1)-h_1]A_p+\\ \qquad\qquad +2(p+1)(2p-2m+1)A_{p+1}=0\end{array}\right.$$

ce qui montre que $m+n$ étant pair, l'équation (a') peut être satisfaite par un polynôme du degré $\frac{n+m}{2}$. Car les termes en $u^{\frac{n+m}{2}-1}$, qui sont ceux dont le degré est le plus élevé, ont un coefficient nul, comme l'indique l'expression (a''). En donnant à p les valeurs $\frac{n+m}{2}$, $\frac{n+m}{2}-1$, ... 1, on calculera successivement les coefficients $A_{\frac{n+m}{2}-1}$, $A_{\frac{n+m}{2}-2}$, ... A_0, $A_{\frac{n+m}{2}}$ étant supposé égal à l'unité, et l'on trouvera des valeurs finies pour chacun d'eux. Mais pour que l'équation (a') soit vérifiée, il faut encore que l'ensemble des termes répondant à $p=0$ soit nul, c'est à dire que l'on ait

$$2(1-2m)A_1-h_1A_0=0,$$

ce qui détermine la constante h_1 par une équation algébrique dont le degré est $\frac{n+m}{2}+1$. Car on voit immédiatement que $A_{\frac{n+m}{2}-1}$ est du premier degré en h_1, $A_{\frac{n+m}{2}-2}$ du second degré, ... A_0 du degré $\frac{n+m}{2}$.

Pour avoir les solutions de la forme (b), on fera dans l'équation (a') la substitution $X=\sqrt{(1-u)(1-k^2u)}\,\Phi(u)$ qui donne

$$(\mathrm{b}')\left|\begin{array}{l}[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\dfrac{d^2\Phi}{du^2}+\\ +[(14-4m)k^2u^2+4(m-2)(k^2+1)u+2(1-2m)]\dfrac{d\Phi}{du}+\\ +\{[(m-2)(m-3)-n(n+1)]k^2u+(2m-1)(k^2+1)-h_1\}\Phi=0\end{array}\right.$$

Substituant dans cette équation un polynôme en u dont le terme général est $A_p u^p$, on trouve en égalant à zéro le coefficient de u^p

$$(\mathrm{b}'')\left\{\begin{array}{c}(2p-n-m)(2p+n-m+1)k^2A_{p-1}+\\+[(2p+1)(2m-2p-1)(k^2+1)-h_1]A_p+2(p+1)(2p-2m+1)A_{p+1}=0\end{array}\right.$$

en sorte que l'équation (b') sera satisfaite par un polynôme du degré $\frac{n+m}{2}-1$ dont on peut supposer le premier coefficient égal à l'unité, et dont les autres se calculeront par l'équation (b''), pourvu que h_1 satisfasse à l'équation obtenue en faisant $p=0$

$$[(2m-1)(k^2+1)-h_1]A_0+2(1-2m)A_1=0$$

qui est du degré $\frac{n+m}{2}$ en h_1.

Les solutions des formes (c) et (d) s'obtiennent en faisant dans l'équation (a') les substitutions $X=\sqrt{1-u}\,\Phi(u)$, $X=\sqrt{1-k^2u}\,\Phi(u)$, qui donnent les équations différentielles

$$(\mathrm{c}')\left\{\begin{array}{c}[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\dfrac{d^2\Phi}{du^2}+\\+\{(10-4m)k^2u^2+4[(m-1)(k^2+1)-1]u+2(1-2m)\}\dfrac{d\Phi}{du}+\\+\{[(m-1)(m-2)-n(n+1)]k^2u+2m-1-h_1\}\Phi=0\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{d}')\left\{\begin{array}{c}[4k^2u^3-4(k^2+1)u^2+4u]\dfrac{d^2\Phi}{du^2}+\\+\{(10-4m)k^2u^2+4[(m-1)(k^2+1)-k^2]u+2(1-2m)\}\dfrac{d\Phi}{du}+\\+\{[(m-1)(m-2)-n(n+1)]k^2u+(2m-1)k^2-h_1\}\Phi=0\end{array}\right.$$

Substituant dans ces équations un polynôme dont le terme général est A_pu^p, on aura les deux relations récurrentes

$$(\mathrm{c}'')\left\{\begin{array}{c}(2p-n-m-1)(2p+n-m)k^2A_{p-1}+[4p(m-p)k^2-(2p+1)(2p-2m+\\+1)-h_1]A_p+2(p+1)(2p-2m+1)A_{p+1}=0\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{d}'')\left\{\begin{array}{c}(2p-n-m-1)(2p+n-m)k^2A_{p-1}+[4p(m-p)-(2p+1)(2p-2m+\\+1)k^2-h_1]A_p+2(p+1)(2p-2m+1)A_{p+1}=0\end{array}\right.$$

et ces dernières relations montrent qu'en supposant $m + n$ impair, on pourra satisfaire aux équations (c') et (d') par des polynômes du degré $\frac{n+m-1}{2}$, pourvu que h_1 vérifie l'une ou l'autre des équations

$$(2m - 1 - h_1)A_0 + 2(1 - 2m)A_1 = 0$$

$$[(2m - 1)k^2 - h_1]A_0 + 2(1 - 2m)A_1 = 0$$

qui sont du degré $\frac{n+m+1}{2}$ en h_1.

Passons aux formes (e) et (f). Les polynômes Φ qui y entrent s'obtiendront en remplaçant dans les équations (c') et (d') Φ par $u^{\frac{2m+1}{2}}\Phi$. On trouve ainsi

$$(\mathrm{e}')\left|\begin{aligned} &[4k^2u^3 - 4(k^2+1)u^2 + 4u]\frac{d^2\Phi}{du^2} + \\ &+ \{(14+4m)k^2u^2 - 4[(m+2)(k^2+1)+1]u + 4m + 6\}\frac{d\Phi}{du} + \\ &+ \{[(m+2)(m+3) - n(n+1)]k^2u - (2m+1)(k^2+1) - 2m - 3 - h_1\}\Phi = 0 \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{f}')\left|\begin{aligned} &[4k^2u^3 - 4(k^2+1)u^2 + 4u]\frac{d^2\Phi}{du^2} + \\ &+ \{(14+4m)k^2u^2 - 4[(m+2)(k^2+1)+k^2]u + 4m + 6\}\frac{d\Phi}{du} + \\ &+ \{[(m+2)(m+3) - n(n+1)]k^2u - 4(m+1)(k^2+1) + 2m + 3 - h_1\}\Phi = 0 \end{aligned}\right.$$

qui donnent lieu aux relations récurrentes

$$(\mathrm{e}'')\left|\begin{aligned} &(2p - n + m)(2p + m + n + 1)k^2A_{p-1} - [(2p+1)(2p+2m+1)k^2 + \\ &+ 4(p+1)(p+m+1) + h_1]A_p + 2(p+1)(2p+2m+3)A_{p+1} = 0 \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{f}'')\left|\begin{aligned} &(2p - n + m)(2p + m + n + 1)k^2A_{p-1} - [4(p+1)(m+p+1)k^2 + \\ &+ (2p+1)(2p+2m+1) + h_1]A_p + 2(p+1)(2p+2m+3)A_{p+1} = 0 \end{aligned}\right.$$

En supposant $m + n$ pair, ces relations montrent que l'on peut satisfaire aux équations (e') et (f') par un polynôme du degré $\frac{n-m}{2} - 1$, pourvu que h_1 vérifie l'une ou l'autre des équations

$$-[(2m+1)k^2 + 4(m+1) + h_1]A_0 + 2(2m+3)A_1 = 0$$

$$-[4(m+1)k^2 + 2m + 1 + h_1]A_0 + 2(2m+3)A_1 = 0$$

équations en h_1 du degré $\frac{n-m}{2}$.

Remplaçons maintenant dans l'équation (a′), Φ par $u^{\frac{2m+1}{2}}\Phi$. Nous aurons pour l'équation linéaire à laquelle doit satisfaire le polynôme Φ de la fonction (g)

$$(g')\quad \begin{cases} [4k^2u^3 - 4(k^2+1)u^2 + 4u]\dfrac{d^2\Phi}{du^2} + \\ + [(4m+10)k^2u^2 - 4(m+2)(k^2+1)u + 4m + 6]\dfrac{d\Phi}{du} + \\ + \{[(m+1)(m+2) - n(n+1)]k^2u - (2m+1)(k^2+1) - h_1\}\Phi = 0 \end{cases}$$

qui donne la relation récurrente

$$(g'')\quad \begin{cases} (2p - n + m - 1)(2p + n + m)k^2A_{p-1} - [(2p+1)(2p+2m+1)(k^2+1) + \\ + h_1]A_p + 2(p+1)(2m+2p+3)A_{p+1} = 0 \end{cases}$$

et l'équation (g′) admettra comme solution un polynôme du degré $\frac{n-m-1}{2}$, si h_1 vérifie l'équation du degré $\frac{n-m+1}{2}$

$$[(2m+1)(k^2+1) + h_1]A_0 + 2(2m+3)A_1 = 0$$

Enfin on obtiendra le polynôme Φ de la fonction (h) en remplaçant Φ par $u^{-\frac{2m+1}{2}}\Phi$ dans l'équation (b′), ce qui donne

$$(h')\quad \begin{cases} [4k^2u^3 - 4(k^2+1)u^2 + 4u]\dfrac{d^2\Phi}{du^2} + \\ + [(4m+18)k^2u^2 - 4(m+3)(k^2+1)u + 4m + 6]\dfrac{d\Phi}{du} + \\ + \{[(m+3)(m+4) - n(n+1)]k^2u - 4(m+1)(k^2+1) - h_1\}\Phi = 0 \end{cases}$$

qui donne lieu à la relation récurrente

$$(\mathrm{h}'')\left|\begin{array}{l}(2p-n+m+1)(2p+n+m+2)k^2A_{p-1}-[4(p+1)(p+m+1)(k^2+1)+\\ \qquad +h_1]A_p+2(p+1)(2m+2p+3)A_{p+1}=0\end{array}\right.$$

L'équation (h') admettra comme solution un polynôme du degré $\frac{n-m-3}{2}$, si h_1 vérifie l'équation du degré $\frac{n-m-1}{2}$

$$-[4(m+1)(k^2+1)+h_1]A_0+2(2m+3)A_1=0$$

Les solutions que nous venons de trouver auraient pu être déduites de l'intégrale générale du N° 6 qui se réduit dans le cas particulier de $N=0$ à $c\sqrt{F}$, le polynôme F devant satisfaire à l'équation du troisième ordre (α). Mais il eût été plus difficile de mettre en évidence les différentes formes de F qui résultent très simplement, comme on l'a vu, de la considération des résidus. On voit aussi que l'équation $N=0$ s'est trouvée décomposée en quatre autres, en sorte qu'en ajoutant les degrés des équations en h_1 que nous avons obtenues soit pour $m+n$ pair, soit pour $m+n$ impair, nous devons reproduire le degré $2n+1$ de l'équation $N=0$, et c'est ce que l'on vérifie immédiatement.

Nous pouvons encore remarquer que dans le cas de $N=0$, nous avons trouvé des solutions correspondant à la première et à la troisième forme du N° 2. La deuxième forme n'a rien donné par suite de la condition $n+1>m$ qui a été reconnue nécessaire. Ajoutons que si dans l'équation (2), on change z en $\frac{\omega'}{2}+z$; on obtient une nouvelle équation qui ne diffère de la première que par le changement de n en m, en sorte que le cas où $n+1$ serait inférieur à m se ramène à celui qui a été traité.

Cas particuliers où le module est égal à l'unité, ou à zéro.

III.

10. Lorsque le module est égal à l'unité, l'intégrale générale se ramène encore à la recherche des solutions de l'équation (β). Mais on

peut faire dépendre la question d'une équation du second ordre seulement, comme l'a fait M. Hermite pour un autre cas. Remarquons que la fonction $\lambda(z)$ qui s'annule pour $z = 0$ doit être remplacée par $v = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$, en sorte que dans les résultats précédents u désignerait le carré de cette fonction de z. Mais il y a avantage à prendre comme élément, dans la formation de la dérivée logarithmique, au lieu de u, la fonction v elle-même dont la dérivée par rapport à z est égale à $1 - v^2$ c'est à dire à une fonction *rationnelle* de v.

En remplaçant u par v^2 dans l'expression (4) de y (N° 2), on aura

$$y = v(v^2 - 1) \sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{1}{v^2 - v_i^2} + \sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{v_i(v_i^2 - 1)}{v^2 - v_i^2} + \frac{m}{v}\frac{dv}{dz}.$$

Or, si l'on réunit les deux termes qui répondent à la même valeur de i, on trouve par la suppression du facteur $v + v_i$

$$\frac{v^3 - v + v_i^3 - v_i}{v^2 - v_i^2} = \frac{v^2 - v_i v + v_i^2 - 1}{v - v_i} = \frac{v^2 - 1}{v - v_i} - v_i = - \frac{1}{v - v_i}\frac{dv}{dz} - v_i$$

d'où

$$y = -\frac{dv}{dz} \sum_{i=1}^{i=m+n} \frac{1}{v - v_i} - \sum_{i=1}^{i=m+n} v_i + \frac{m}{v}\frac{dv}{dz}.$$

Désignons par $\phi(v)$ le polynôme du degré $m + n$ dont les racines sont v_i, par c la constante $\sum v_i$, et par $F(v)$ le quotient de $\phi(v)$ par v^m, on aura alors

$$y = -\frac{1}{F}\frac{dF}{dv}\frac{dv}{dz} - c$$

et cette valeur de y substituée dans l'équation

$$\frac{dy}{dz} - y^2 = -n(n + 1)v^2 - h - \frac{m(m + 1)}{v^2}$$

donnera l'équation du second ordre

$$(1 - v^2)^2 \frac{d^2F}{dv^2} + 2(c - v)(1 - v^2)\frac{dF}{dv} + \left[c^2 - n(n + 1)v^2 - h - \frac{m(m + 1)}{v^2}\right]F = 0$$

La constante c se détermine immédiatement en faisant $v = \pm 1$ et en écartant pour un moment le cas où F s'annulerait pour une de ces valeurs. On a ainsi

$$(9) \qquad c^2 = n(n+1) + h + m(m+1).$$

Moyennant cette valeur de c, le facteur $1 - v^2$ se supprime de l'équation différentielle, et l'on obtient pour l'équation à laquelle doit satisfaire la fonction F

$$(10) \qquad (1-v^2)\frac{d^2F}{dv^2} + 2(c-v)\frac{dF}{dv} + \left[n(n+1) - \frac{m(m+1)}{v^2}\right]F = 0$$

Substituant dans cette équation

$$F(v) = v^n + A_{n-1}v^{n-1} + \ldots + A_0 + \frac{A_{-1}}{v} + \ldots + \frac{A_{-m}}{v^m}$$

on aura, en égalant à zéro le coefficient de v^p, la relation récurrente

$$(11) \quad -(p-n)(p+n+1)A_p + 2c(p+1)A_{p+1} + (p-m+1)(p+m+2)A_{p+2} = 0$$

L'équation (11) où l'on fera successivement $p = n-1, n-2, \ldots 0, \ldots -m$ donnera les coefficients de F. Pour être assuré que l'équation (10) est satisfaite, il faut montrer que les termes des degrés $-(m+1)$ et $-(m+2)$ sont nuls. C'est ce qui résulte immédiatement, pour les seconds, de la formule (11) où l'on fait $p = -(m+2)$. Quant aux premiers, il n'y a qu'à répéter le calcul fait au N° 5 en utilisant la relation

$$(12) \qquad A_{-l} = \frac{(m-l+1)(m-l+2)\ldots(m+l)}{(n-l+1)(n-l+2)\ldots(n+l)}A_l$$

Remarquons que la fonction F satisfait à l'équation différentielle indépendamment de l'hypothèse que F ne s'annule pas pour $v = \pm 1$, et comme à une valeur de h répondent, par l'équation (9), deux valeurs de c égales et de signes contraires, on trouvera ainsi deux solutions rationnelles de l'équation différentielle excepté dans le cas de $c = 0$ où elles se confondent. L'équation différentielle (10) ne changeant pas, quand on change v en $-v$ et c en $-c$, il en résulte que si $F(v, c)$ est une première solution, la seconde solution qui est $F(v, -c)$ peut s'écrire $F(-v, c)$.

Revenant de la dérivée logarithmique à la fonction Y, on aura les deux solutions

$$Y_1 = F(v,\ c)e^{cz}, \quad Y_2 = F(-v,\ c)e^{-cz}$$

qui se déduisent l'une de l'autre par le changement de z en $-z$, puisque v est une fonction impaire de z.

11. Les deux intégrales obtenues se confondent pour $c = 0$; mais d'après la recherche générale faite plus haut, cette circonstance doit se présenter pour $2n + 1$ valeurs de h, c'est à dire pour n valeurs de c, abstraction faite du signe et de la valeur $c = 0$. Or il arrive ici que ces valeurs de c sont des nombres entiers que nous allons déterminer.

Une condition nécessaire pour que les deux intégrales aient un rapport constant, c'est que la fonction $F(v)$ admette l'un des facteurs $v + 1$ ou $v - 1$, la fonction $F(-v)$ admettant alors les facteurs $v - 1$ ou $v + 1$. Car dans l'hypothèse admise, les deux dérivées logarithmiques sont identiques, et l'on aura

$$-\frac{1}{F(v)}\frac{dF(v)}{dv}\frac{dv}{dz} - c = -\frac{1}{F(-v)}\frac{dF(-v)}{dv}\frac{dv}{dz} + c$$

ou bien

$$2cF(v)F(-v) = (1 - v^2)\left[F(v)\frac{dF(-v)}{dv} - F(-v)\frac{dF(v)}{dv}\right]$$

Cela posé, il est facile de voir que $c = q$ est la condition pour que la fonction $F(v)$ admette le facteur $1 - v$ au degré entier q de multiplicité. Car l'équation (10) devra alors être vérifiée par une expression de la forme $(1 - v)^q\Phi(v)$, où $\Phi(v)$ est une fraction rationnelle n'admettant que le pôle $v = 0$ à distance finie. Différentions deux fois cette expression, et substituons dans l'équation (10). On trouvera des termes contenant tous le facteur $(1 - v)^q$ à l'exception de ceux-ci

$$(1 - v)^{q-1}\Phi(v)[q(q - 1)(v + 1) - 2q(c - v)].$$

Il est donc nécessaire que la parenthèse s'annule pour $v = 1$, ce qui donne $c = q$. Maintenant, pour voir si cette condition est suffisante, faisons dans l'équation (10) avec l'hypothèse $c = q$, la substitution $F(v) = (1 - v)^q\Phi(v)$, on aura l'équation

$$(13) \qquad (1-v^2)\frac{d^2\Phi}{dv^2} - 2(q+1)v\frac{d\Phi}{dv} + \left[n(n+1) - q(q+1) - \frac{m(m+1)}{v^2}\right]\Phi = 0$$

On s'assure aisément que $c = -q$ est une condition nécessaire pour que $F(v)$ admette le diviseur $(1+v)^q$, et que la substitution $F = (1+v)^q\Phi$ conduit encore à l'équation différentielle précédente.

Il nous reste à établir que l'équation (13) admet comme solution une expression rationnelle de la forme

$$\Phi(v) = v^{n-q} + \ldots + A_0 + \ldots + \frac{A_{-m}}{v^m}.$$

Or en égalant à zéro le coefficient de v^p après la substitution, on obtient

$$(n-p-q)(n+p+q+1)A_p + (p-m+1)(p+m+2)A_{p+2} = 0$$

qui montre que $\Phi(v)$ ne contiendra que des termes de même parité. Deux cas sont maintenant à distinguer, suivant que m et $n-q$ sont de même parité ou non. Dans le premier cas, les valeurs $n-q-2$, $n-q-4$, $\ldots -m$ données successivement à p détermineront les coefficients correspondants de la fonction Φ qui satisfera à l'équation différentielle avec la seule restriction que $n-q \geqq -m$ ou $q \leqq n+m$. On obtiendra ainsi pour q les valeurs

$n+m,\quad n+m-2,\quad \ldots\quad 2,\quad 0$ si $m+n$ est pair

$n+m,\quad n+m-2,\quad \ldots\quad 3,\quad 1$ si $m+n$ est impair.

Dans le second cas, en donnant à p les valeurs $n-q-2$, $n-q-4$, $\ldots (m+1)$, on déterminera les coefficients de même indice; mais en faisant $p = m-1$, on trouve $A_{m-1} = 0$, et par suite tous les coefficients suivants sont nuls. La fonction $\Phi(v)$ est alors

$$\Phi(v) = v^{n-q} + A_{n-q-2}v^{n-q-2} + \ldots + A_{m+1}v^{m+1}$$

et il y aura une solution de cette forme si $n-q \geqq m+1$ ou bien $q \leqq n-m-1$, ce qui donne pour q les valeurs

$n-m-1,\quad n-m-3,\quad \ldots\quad 3,\quad 1$ si $m+n$ est pair

$n-m-1,\quad n-m-3,\quad \ldots\quad 2,\quad 0$ si $m+n$ est impair.

On aperçoit immédiatement que, quelle que soit la parité de $m + n$, il y aura $n + 1$ valeurs de q, en comptant $q = 0$, qui donneront des solutions de l'équation (13). Telles sont les valeurs exceptionnelles de c, et il est bien facile de voir que, dans ce cas, les deux intégrales trouvées plus haut ont un rapport constant; car on peut les mettre sous cette forme

$$(-1)^q \Phi(v)(1 - v)^q e^{qz}, \quad \Phi(v)(1 + v)^q e^{-qz}$$

dont le rapport est ± 1, puisque $\frac{1 + v}{1 - v} = e^{2z}$.

12. Lorsque c a l'une de ces valeurs exceptionnelles, on peut trouver une seconde solution en employant, comme l'a fait M. Hermite, la méthode de D'Alembert. Introduisons pour cela la fonction

$$\Psi(v, c) = e^{2cz} F(v, c) - (-1)^q F(v, -c)$$

qui s'annule identiquement pour $c = q$. L'intégrale générale peut s'écrire, en désignant par c_1 et c_2 deux constantes arbitraires

$$c_1 e^{cz} F(v, c) + c_2 e^{-cz} \Psi(v, c).$$

Posons maintenant $c = q + \varepsilon$ où ε est infiniment petit et $c_2 \varepsilon = c'_2$; on aura l'intégrale

$$c'_2 e^{-qz} \frac{d}{dc} \Psi(v, q)$$

Or on a

$$\frac{d}{dc} \Psi(v, c) = 2z e^{2cz} F(v, c) + e^{2cz} \frac{d}{dc} F(v, c) - (-1)^q \frac{d}{dc} F(v, -c)$$

ce qui donne pour l'intégrale générale

$$c_1 e^{qz} F(v, q) + c'_2 [2z e^{qz} F(v, q) + e^{qz} \frac{d}{dc} F(v, q) - (-1)^q e^{-qz} \frac{d}{dc} F(v, -q)]$$

Soit par exemple $n = 2$, $m = 1$, $c = 1$. L'équation en Y est

$$\frac{d^2 Y}{dz^2} = \left(6v^2 - 7 + \frac{2}{v^2}\right) Y$$

or l'on a

$$F(v,\ c) = v^2 - cv + \frac{1}{3}c^2 - \frac{c}{3v}$$

et l'intégrale générale est après une réduction facile

$$c_1 e^{2z}(v - 1)\left(v + \frac{1}{3v}\right) + c'_2 e^z \left[z(v - 1)\left(v + \frac{1}{3v}\right) + \frac{1 - 3v^2}{3(v + 1)}\right]$$

comme on peut le constater par une substitution directe.

Cas où le module est nul.

13. La fonction $\lambda(z)$ se réduit alors à $\sin z$ et l'équation (2) devient

(14) $$\frac{d^2Y}{dz^2} = \left[\frac{m(m + 1)}{\sin^2 z} + h\right]Y.$$

C'est, sauf le changement de z en $\frac{\pi}{2} - z$, et pour le cas particulier où $-h$ est le carré d'un nombre entier au plus égal à m, l'équation que Lamé a rencontrée dans la recherche des températures d'un ellipsoide planétaire dont on entretient les différents points de la surface à des températures connues.[1] On peut la ramener à l'équation ordinaire de Lamé où le module est égal à l'unité et rentrer ainsi dans un cas étudié complètement par M. Hermite. Nous savons, en effet que pour $k = 1$, la fonction $\lambda(z)$ doit être remplacée par $\frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$ ou bien par $-i \operatorname{tg} zi$. Si l'on pose alors $zi = \frac{\pi}{2} - z'$, $h' = -h - n(n + 1)$, l'équation

$$\frac{d^2Y}{dz^2} = [n(n + 1)k^2\lambda^2(z) + h]Y$$

---

(1) Lamé. Leçons sur les fonctions inverses ..., page 249.

devient

$$\frac{d^2Y}{dz'^2} = \left[\frac{n(n+1)}{\sin^2 z'} + h'\right] Y$$

qui ne diffère de l'équation (14) que par le changement de m en n et de h en h'.

Mais dans le cas général où les deux intégrales sont distinctes, c'est à dire quand $-h$ n'est pas le carré d'un nombre entier au plus égal à m, l'équation (14) peut être intégrée sous une autre forme. L'équation $(\gamma) = 0$ du N° 5 se réduit pour $k = 0$ à celle-ci

$$(\gamma') \qquad 2(p+1)[h + (p+1)^2]A_{p+1} + (2p+3)(m-p-1)(m+p+2)A_{p+2} = 0$$

et détermine pour la fonction $F(u)$ une expression qui ne contient plus que des termes de degrés négatifs en $u = \sin^2 z$

$$F(u) = A_0 + \frac{A_{-1}}{u} + \ldots + \frac{A_{-m}}{u^m}$$

où l'un des coefficients A restera arbitraire, en sorte que l'on pourra faire $A_{-m} = 1$. C'est ce qui résulte immédiatement de la relation (γ'), en remarquant qu'elle est vérifiée d'elle-même pour $p = -1$ et pour $p = -m-2$. Cette fonction F satisfera à l'équation (α) du N° 5, si l'on détermine convenablement la constante N. Mais la forme trouvée pour F conduit naturellement au changement de variable $u = \frac{1}{v}$, et l'on constate aisément que l'équation (α) peut s'écrire ainsi

$$(\alpha') \qquad \frac{d^2F}{dv^2}\frac{dv^2}{dz^2} - 2F\left[\frac{d^2F}{dv^2}\frac{dv^2}{dz^2} + \frac{dF}{dv}\frac{d^2v}{dz^2}\right] - N^2 + 4F^2[m(m+1)v + h] = 0$$

où l'on a maintenant

$$\frac{dv^2}{dz^2} = 4v^2(v^2-1), \qquad \frac{d^2v}{dz^2} = 2v(3v-2)$$

en sorte que si, dans l'équation précédente, on fait $v = 0$, on trouve $N^2 = 4hA_0^2$ qui fournit bien les valeurs exceptionnelles de h indiquées plus haut, quand on égale N à zéro.

Il résulte des calculs relatifs au cas général, que l'on arrive à l'équation (α') en faisant dans l'équation

$$\frac{dy}{dz} - y^2 = - m(m+1)v - h$$

la substitution

$$y = -\frac{1}{2F}\frac{dF}{dv}\frac{dv}{dz} - \frac{N}{2F} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{1}{v-v_i} - \frac{N}{2}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{1}{\left(\frac{dF}{dv}\right)_{v_i}}\frac{1}{v-v_i}$$

Or l'équation (α') où l'on fait $v = v_i$ donne

$$N = \pm\left(\frac{dF}{dv}\right)_{v_i}\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z_i}$$

et si l'on choisit z_i de façon que, substituée dans la fonction $\frac{dF}{dv}\frac{dv}{dz}$, elle donne la détermination adoptée pour N, on pourra écrire

$$y = \frac{\cos z}{\sin^3 z}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z_i}} + \sum_{i=1}^{i=m}\frac{\cos z_i}{\sin^3 z_i}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z_i}}.$$

L'expression qui figure sous le second signe $\sum$ est égale à

$$\frac{\cos z_i \sin^2 z}{\sin z_i(\sin^2 z_i - \sin^2 z)}$$

c'est une fonction dont la période est π. Elle devient infinie pour $z = z_i$ et $z = -z_i$ avec les résidus $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, ce qui conduit facilement à l'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2}\cot(z_i - z) + \frac{1}{2}\cot(z_i + z) - \cot z_i$$

On aura donc

$$y = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d}{dz}\log\left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z_i}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dz}\log\sin(z_i - z) - \frac{d}{dz}\log\sin(z_i + z)\right] - \sum_{i=1}^{i=m}\cot z_i$$

et en passant de la dérivée logarithmique à la fonction Y

$$Y = c_1 e^{z \sum_{i=1}^{i=m} \cot z_i} \prod_{i=1}^{i=m} \sqrt{\frac{\sin (z_i - z)}{\sin (z_i + z)} \left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z_i} \right)}$$

Le terme placé sous le radical se réduit à $\frac{\sin^2 (z_i - z)}{\sin^2 z \sin^2 z_i}$. Donc, en faisant entrer dans la constante c_1 l'inverse du produit des quantités $\sin z_i$, on aura pour Y l'intégrale

$$c_1 \frac{\sin (z - z_1) \sin (z - z_2) \ldots \sin (z - z_m)}{\sin^m (z)} e^{z \sum_{i=1}^{i=m} \cot z_i}.$$

On aura une seconde intégrale en adoptant la seconde valeur de N, ce qui revient au changement de signe de tous les z_i, ou encore au changement de z en $-z$.

SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES ET QUELQUES AUTRES FONCTIONS UNIFORMES

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

La fonction $\Gamma(a)$ peut être représentée par deux séries convergentes pour toutes les valeurs de a.

Posons avec Mr Prym

$$\Gamma(a) = \int_0^1 e^{-x} x^{a-1} dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{1} \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{1}{a+2} - \ldots\ldots$$

$$+ \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$$

$$= P(a) + Q(a).$$

$P(a)$ est une fonction uniforme finie et déterminée pour toutes les valeurs de a, excepté pour $a = 0, -1, -2, -3, \ldots,$ qui sont les pôles de $P(a)$.

$Q(a)$ est holomorphe dans tout le plan. Soit $a = \alpha + \beta i$

$$Q(a) = \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} \cos(\beta l x) dx + i \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} \sin(\beta l x) dx.$$

Chacune des deux parties de $Q(a)$ a une valeur finie et déterminée pour toutes les valeurs de a; il est même facile d'en obtenir une limite. Posons

$$lx = \omega \quad \text{d'où} \quad x = e^{\omega},$$

on aura

$$Q(a) = \int_0^\infty e^{-e^{\omega}} e^{a\omega} \cos \beta\omega d\omega + i \int_0^\infty e^{-e^{\omega}} e^{a\omega} \sin \beta\omega d\omega.$$

Ces intégrales se composent de parties

$$a,\ b,\ c, \cdots,\ i,\ k,\ l,\ m, \cdots,\ p,\ q,\ r$$

alternativement positives et négatives et de la même amplitude. Le facteur $e^{-e^{\omega}}e^{a\omega}$, pour $\alpha > 1$ va d'abord en augmentant, atteint un maximum pour $\omega = l\alpha$ qui est $\mu = e^{+\alpha(l\alpha - 1)}$ et puis va en diminuant; pour $\alpha \leqq 1$, ce facteur va constamment en diminuant et son maximum μ correspond à $\omega = 0$ et il est égal e^{-1}.

Donc chacune des intégrales qui forment $Q(a)$ est moindre que la plus grande des quantités $a,\ b,\ c, \ldots .\ i,\ k,\ l,\ m, \ldots .\ p,\ q,\ r.$ Or la plus grande de ces quantités est moindre que

$$\mu \int_0^\pi \sin \beta\omega d\omega = \frac{2\mu}{\beta} \cdot$$

Ainsi le module de $Q(a)$ sera moindre que

$$\frac{2\mu}{\beta} \sqrt{2}\,.$$

Dans le cas où $\beta = 0$, en supposant $\alpha \leqq 1$

$$Q(a) < \int_1^\infty e^{-x} dx = e^{-1}.$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$Q(a) = e^{-1} + (a - 1) \int_1^\infty e^{-x} x^{a-2} dx,$$

donc

$$Q(a) < e^{-1} [1 + (a - 1) + (a - 1)(a - 2) + \cdots + (a - 1)(a - 2) \cdots (a - n)]$$

n étant le plus grand nombre d'entiers contenus dans α.

Ainsi

$$P(a) + Q(a)$$

définit une fonction uniforme, pour toutes les valeurs de a, ayant pour pôles $0, -1, -2, \ldots$ et qui prend la même valeur que la fonction définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$$

pour $\alpha > 0$; et qui a été généralisée par GAUSS, au moyen d'un produit d'un nombre indéfini de facteurs.

La fonction ainsi définie jouit d'ailleurs de la propriété fondamentale, à savoir

$$P(a + 1) + Q(a + 1) = a[P(a) + Q(a)],$$

qui permet de la ramener au cas où $\alpha > 0$. Ainsi la fonction définie par GAUSS et la fonction $P(a) + Q(a)$ sont identiques.

$Q(a)$ étant holomorphe dans toute l'étendue du plan, peut être développée en série convergente, pour toutes les valeurs de a.

On obtient encore une fonction holomorphe pour tout le plan en multipliant $\Gamma(a)$ par $\frac{\sin a\pi}{\pi}$, car

$$\frac{\sin a\pi}{\pi} P(a)$$

n'a plus de pôles; donc $\frac{\sin a\pi}{\pi}\Gamma(a)$ c'est à dire $\frac{1}{\Gamma(1-a)}$ ou bien $\frac{1}{\Gamma(a)} = G(a)$ est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan.

Mr HEINE a donné à $G(a)$ une forme qui peut être très-utile dans beaucoup de cas. Ce savant géomètre a fait voir que

$$G(a) = \frac{1}{2\pi i}\int e^z z^{-a} dz$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour qui contient l'origine et qui s'étend indéfiniment vers les x négatifs, sans qu'il soit nécessaire que ce contour soit fermé. Voici la démonstration de Mr HEINE.

Prenons pour contour d'intégration l'axe des x depuis $-\infty$ jusqu'à $-\eta$; un cercle de rayon η autour de l'origine et l'axe des x depuis $-\eta$ jusqu'à $-\infty$.

On a

$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

$$z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\omega - i\sin a\omega),$$

$$dz = \rho(-\sin\omega + i\cos\omega)d\omega$$
$$+ (\cos\omega + i\sin\omega)d\rho.$$

Dans la première partie,

$$\omega = -\pi, \qquad z = -\rho, \qquad dz = -d\rho,$$
$$z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\pi + i\sin a\pi).$$

Dans la deuxième partie

$$z = \eta e^{\omega i}, \qquad dz = i\eta e^{\omega i}d\omega,$$
$$z^{-a} = \eta^{-a}e^{-a\omega i}.$$

Dans la troisième

$$\omega = \pi, \qquad z = -\rho, \qquad dz = -d\rho,$$
$$z^{-a} = \rho^{-a}(\cos a\pi - i\sin a\pi).$$

Les trois parties de l'intégrale, ajoutées ensemble, donnent

$$\int e^z z^{-a}dz = 2i\sin a\pi\int_\eta^\infty \rho^{-a}e^{-\rho}d\rho + i\eta^{1-a}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-a)\omega i}e^{\eta e^{\omega i}}d\omega,$$

d'où, en supposant la partie réelle de a comprise entre 0 et 1,

$$\int e^z z^{-a}dz = 2i\sin a\pi\Gamma(1-a),$$

d'où

$$G(a) = \frac{1}{2\pi i}\int z^{-a}e^z dz. \tag{1}$$

L'intégration par parties donne

$$\int z^{-a}e^z dz = e^z z^{-a} + a\int z^{-(a+1)}e^z dz = a\int z^{-(a+1)}e^z dz.$$

Si donc la formule (1) est vraie pour a, on tirera de la relation précédente

$$\frac{1}{a} G(a) = G(a + 1) = \frac{1}{2\pi i} \int z^{-(a+1)} e^z dz,$$

et dès lors la formule (1) sera vraie pour $(a + 1)$; de même, si elle est vraie pour $a + 1$, elle le sera pour a. Ainsi la formule (1) est vraie pour toutes les valeurs de a.

Reprenons l'intégrale $\int z^{-a} e^z dz$ sur le même contour, en agrandissant la circonférence et lui donnant pour rayon 1 au lieu de η; l'intégrale reprendra la même valeur, puisque les deux contours ne comprennent point entre eux de point critique. Donc

$$G(a) = \frac{1}{2\pi i}\left(2i \sin a\pi \int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a} d\rho + i \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos\omega + i\sin\omega) + (1-a)\omega i} d\omega\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2 \sin a\pi \int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a} d\rho + \int_0^\pi e^{\cos\omega}\left\{e^{-[(1-a)\omega + \sin\omega]i} + e^{[(1-a)\omega + \sin\omega]i}\right\} d\omega\right]$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_1^\infty e^{-\rho}\rho^{-a} d\rho + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega} \cos[(1 - a)\omega + \sin\omega] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty e^{-\rho}\left(e^{a(\pi i - l\rho)} - e^{-a(\pi i + l\rho)}\right) d\rho$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega} \cos[(1 - a)\omega + \sin\omega] d\omega.$$

Étudions le développement de chacune des deux parties suivant les puissances croissantes de a.

Pour la première partie le coefficient de a^n sera

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i \Gamma(n + 1)}\int_1^\infty e^{-\rho}[(l\rho - \pi i)^n - (l\rho + \pi i)^n] d\rho,$$

et pour la seconde

$$\delta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi \Gamma(n + 1)}\int_0^\pi e^{\cos\omega} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\omega + \sin\omega)\omega^n d\omega.$$

Nous calculerons plus loin la valeur exacte de ces coefficients; je me propose, pour le moment, d'en déterminer une valeur approchée.

Pour δ_n, on a une première valeur approchée en faisant

$$e^{\cos\omega}\frac{\sin}{\cos}(\omega + \sin\omega) = e,$$

ce qui donnera

$$\delta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi \Gamma(n+1)}\frac{e\pi^{n+1}}{(n+1)}.$$

On pourrait obtenir une valeur plus approchée en partageant cette intégrale en deux parties; mais cela n'est pas nécessaire, attendu que δ_n disparaît rapidement devant γ_n.

Pour calculer la valeur approchée de γ_n, nous allons dégager son expression des imaginaires, et pour cela nous poserons

$$l\rho = r\cos\omega, \qquad \pi = r\sin\omega,$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\pi}{l\rho}, \qquad d\rho = -\frac{r^2\rho\, d\omega}{\pi};$$

il viendra

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2 \Gamma(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}} \sin n\omega\, d\omega.$$

Étudions d'abord les variations du facteur

$$e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}.$$

La dérivée est

$$\{e^{-\rho}(1-\rho)[(l\rho)^2 + \pi^2] + (n+2)l\rho e^{-\rho}\}[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n}{2}}$$

$$= e^{-\rho}(1-\rho)[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n}{2}}\left[(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho - 1}l\rho + \pi^2\right].$$

Lorsque ρ varie de 1 à ∞, le deuxième facteur reste négatif; la dérivée sera donc positive ou négative suivant que

$$(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho-1}l\rho + \pi^2$$

sera négatif ou positif. D'ailleurs ce facteur ne peut passer qu'une fois par zéro, car, à mesure que ρ augmente, la partie positive augmente et la partie négative diminue.

La valeur qui annule ce facteur va aussi en augmentant à mesure que n augmente. D'après ces considérations, le facteur $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$ commence par augmenter, passe par un maximum, puis va sans cesse en diminuant et tend vers zéro. Le maximum correspond à la racine de l'équation

$$(l\rho)^2 - \frac{n+2}{\rho - 1} l\rho + \pi^2 = 0.$$

Pour évaluer

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2 \Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}} \sin n\omega \, d\omega,$$

nous partagerons l'intégrale en $\frac{n}{2}$ parties égales, de telle sorte que dans chacune de ces parties l'argument $n\omega$ varie de π, $\sin n\omega$ conservant le même signe dans toute l'étendue de chaque partie, sauf à laisser incomplète la dernière partie si n est impair.

Soient

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ f,\ i,\ k,\ l,\ m,\ n,\ \ldots,\ x,\ y,\ z$$

les valeurs absolues des intégrales partielles et k la plus grande. Il est clair, puisque le facteur $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$ va en augmentant et puis en diminuant, que ces intégrales sont dans le même cas. Le doute ne peut exister que pour celle qui contient le maximum du facteur, celle qui la précède et celle qui la suit. Supposons d'abord que k contienne ce maximum; on aura

$$A = (k - l) + (m - n) + \ldots = k - (l - m) \ldots,$$

$$B = (k - j) + (i - f) + \ldots = k - (j - i) \ldots .$$

Toutes les parenthèses étant positives, il résulte

$$0 < A < k \quad \text{et} \quad 0 < B < k,$$

d'où

$$-k < A + B - k < k$$

Ainsi l'intégrale totale sera plus petite, en valeur absolue, que la plus grande des intégrales partielles.

Si le maximum du facteur se trouve dans l, comme les derniers éléments de k sont plus petits que les premiers de l, il faudra que les premiers de k soient plus grands que les derniers de l; donc les éléments de l sont respectivement plus grands que ceux de m; par conséquent toutes les intégrales partielles vont en diminuant à partir de k, tant d'un côté que de l'autre, et le raisonnement précédent s'applique à tous les cas.

Soit μ le maximum de $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$; on aura

$$\gamma_n < \frac{\mu}{\pi^2 I(n+1)n}\int_0^\pi \sin\omega\, d\omega = \frac{2\mu}{n\pi^2 I(n+1)}.$$

Soient μ, μ' les valeurs correspondant à n et $n+1$:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{e^{-\rho'}\rho'}{e^{-\rho}\rho}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left(\frac{l\rho'}{\rho'-1} : \frac{l\rho}{\rho-1}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left[\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n+3)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Le premier et le troisième facteurs sont plus petits que 1, puisque, à mesure que n augmente, la racine ρ de $(l\rho)^2\frac{n+2}{\rho-1}l\rho + \pi^2 = 0$ va en augmentant; le second est plus petit que $e^{\frac{1}{2}}$; donc

$$\frac{\mu'}{\mu} < \left[e\frac{l\rho'}{\rho'-1}(n+3)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n = 20$, $\left(e\frac{l\rho'}{\rho'-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ est sensiblement égal à 1, et pour les valeurs supérieures il est plus petit que 1. Donc, pour $n = 20$ ou supérieur à 20, on a

$$\frac{\mu'}{\mu} < \sqrt{n+3}.$$

De plus, pour $n = 20$, on a

$$\mu_{20} < 2\sqrt{1.2\ldots 22}.$$

Donc, pour $n > 20$,

$$\mu_n < 2\sqrt{1.2\ldots(n+2)}$$

Donc

$$\gamma_n < \frac{4\sqrt{l(n+3)}}{\pi^2 n\, l(n+1)} = \frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2 n\sqrt{l(n+3)}},$$

ce qui est sensiblement égal à $\dfrac{4}{\pi^2\sqrt{l(n+1)}}$.

Par conséquent

$$\gamma_n < \frac{4}{\pi^2\sqrt{l(n+1)}}.$$

On voit par là que les quantités δ_n disparaissent rapidement devant γ_n.

Cette expression des coefficients prouve encore que le développement de $G(a)$ est convergent pour toutes les valeurs de a, comme nous le savions d'avance.

Ces coefficients sont de l'ordre $\frac{1}{2}$ des coefficients de l'exponentielle.

Comme application, faisons $n = 19$.

La racine de $(l\rho)^2 - \dfrac{n+2}{\rho-1} l\rho + \pi^2 = 0$ est $\rho = 3,25$.

$$\begin{aligned} l\rho &= 1,163, \\ (l\rho)^2 &= 1,353, \\ \pi^2 + (l\rho)^2 &= 11,223. \end{aligned}$$

Calcul de $\mu_{19} = e^{-3,2} \times 3,25\,(11,22)^{10,5}$.

$$\begin{aligned} \text{colog}\, e^{3,2} &= \bar{2},588 \\ \log 3,25 &= 0,512 \\ 10,5 \log 11,22 &= 11,025 \\ \hline \log \mu_{19} &= 10,125 \end{aligned}$$

Calcul de $\gamma_{19} = \dfrac{2\mu_{19}}{\pi^2 19 . l(20)}$.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,301 \\ \log \mu_{19} &= 10,125 \\ \text{colog}\, \pi^2 &= \bar{1},006 \\ \log \frac{1}{l(20)} &= \overline{18},914 \\ \text{colog}\, 19 &= \bar{2},721 \\ \hline \log \gamma_{19} &= \bar{9},067 \\ \gamma_{19} &= 0,0000\,0000\,1167 \end{aligned}$$

Pour avoir δ_{19} avec une plus grande approximation, nous partagerons l'intégrale en deux parties, soit

$$\pi I(20)\delta_{19} = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{\cos\omega} \sin(\omega + \sin\omega)\omega^{19} d\omega + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{\cos\omega} \sin(\omega + \sin\omega)\omega^{19} d\omega.$$

La première partie est évidemment plus petite que $\frac{e}{20}(\frac{3}{4}\pi)^{20}$, et la seconde plus petite que $\frac{e^{-0,707} \times 0,078}{20}[\pi^{20} - (\frac{3}{4}\pi)^{20}]$.

Donc

$$\delta_{19} < \left\{ \frac{e}{20}(\tfrac{3}{4}\pi)^{20} + \frac{e^{-0,707} \times 0,078}{20}\pi^{20} \right\} \frac{1}{\pi I(20)}$$

$$= [e(\tfrac{3}{4})^{20} + e^{-0,707} . 0,078] \frac{\pi^{19}}{20 I(20)}.$$

Calcul de $u = e(\frac{3}{4})^{20}$.	*Calcul de* $v = 0,078 . e^{-0,707}$.
$\log e = 0,434$	$\log e^{-0,707} = \bar{1},714$
$20 l \frac{3}{4} = \bar{3},500$	$\log 0,078 = \bar{2},892$
$\log u = \bar{3},934$	$\log v = \bar{2},606$
$u = 0,009$	$v = 0,041$

$$u + v = 0,050.$$

$$\textit{Calcul de } \delta_{19} = 0,050 \frac{\pi^{19}}{20 I(20)}.$$

$$\begin{aligned}
\log(u+v) &= \bar{2},699 \\
19 \log \pi &= 9,550 \\
\operatorname{colog} 20 &= \bar{2},699 \\
\log \frac{1}{I(20)} &= \overline{18},914 \\
\log \delta_{19} &= \overline{11},862 \\
\delta_{19} &= 0,0000\,0000\,0073 \\
\gamma_{19} &= 0,0000\,0000\,1167 \\
\gamma_{19} + \delta_{19} &= 0,0000\,0000\,1240
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons, pour limite du coefficient de a^n, 0,0000 0000 1240. Nous trouverons plus loin, pour la vraie valeur, 0,0000 0000 0104, c'est-à-dire une valeur douze fois plus petite.

Nous avons calculé γ_{19} en nous servant de μ_{19}; si l'on calculait au moyen de la formule $\gamma_{19} = \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(20)}}$, on trouverait exactement la même valeur.

On voit par ce calcul que, pour $n = 19$, δ_{19} est négligeable devant γ_{19}, au degré d'approximation que nous pouvons attendre.

Les limites que nous venons de calculer pourront servir à obtenir une limite du reste de la série.

Occupons-nous à present de la détermination exacte des coefficients du développement de $\frac{1}{\Gamma(a)} = G(a)$:

$$G(a) = n^{-a}a(1 + a)\left(1 + \frac{a}{2}\right)\left(1 + \frac{a}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a}{n}\right).$$

Le facteur

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right)\left(1 + \frac{a}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a}{n}\right) = 1 + A_1 a + A_2 a^2 + \cdots + A_{n-1}a^{n-1}.$$

Le coefficient A_i s'obtient en faisant la somme des combinaisons i à i des quantités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$. Il est facile de déduire ces coefficients les uns des autres.

En effet,

$$i\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i = \Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-1} - \Sigma a_1^2 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-2} + \Sigma a_1^3 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{i-3} \ldots \pm \Sigma a_i^i,$$

d'où

$$iA_i = S_1 A_{i-1} - S_2 A_{i-2} + S_3 A_{i-3} - \cdots \pm S_i.$$

Ces coefficients ne dépendent donc que de $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$.

Nous avons ensuite

$$n^{-a} = 1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \frac{a^3(ln)^3}{1.2.3} + \cdots;$$

Donc

$$\frac{G(a)}{a(1 + a)} = \left\{1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{1.2} - \frac{a^3(ln)^3}{1.2.3} + \cdots\right\}$$

$$\times [1 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \cdots + A_n a^n]$$

$$= 1 + A'_1 a + A'_2 a^2 + A'_3 a^3 + \ldots,$$

où

$$A'_i = A_i - A_{i-1}\frac{ln}{1} + A_{i-2}\frac{(ln)^2}{1.2} - \ldots \pm \frac{(ln)^i}{1.2\ldots i}.$$

Posons $C = -S_1 + ln$, ou $C = 1 - C'$, C' étant la constante d'Euler, et remplaçons, dans l'expression de $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, S_1 par $-C + ln$; il est clair, puisque ces coefficients ont une valeur finie, qu'ils seront indépendants de ln et que l'on peut donner à ln telle valeur que l'on voudra, et par exemple faire $ln = 0$. Mais alors A'_i est égal à ce que devient A_i lorsqu'on y remplace S_1 par $-C$.

Dès lors les coefficients se forment de la manière suivante:

On multiplie les coefficients déjà obtenus $A_{i-1}, A_{i-2}, A_{i-3}, \ldots, A_1, 1$ respectivement par $-C, -S_2, +S_3, -S_4, \ldots, \pm S_i$; on ajoute tous les produits; on divise la somme par i, et l'on a A_i,

$$A_1 = -C.$$

Il est à remarquer que l'erreur de $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sera du même ordre que celle de $C, S_1, S_2, S_3, \ldots$. Supposons, en effet, que $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{i-1}$ aient été calculés avec la même approximation que $C, S_1, S_2, S_3, \ldots$; les produits $A_1 S_{i-1}, A_2 S_{i-2}, \ldots, A_{i-1} S_1$ pourront se calculer avec la même approximation, et la somme aura une erreur au plus de i unités de cet ordre, et, en divisant par i, l'erreur du résultat sera au plus d'une unité de cet ordre.

Le nombre de multiplications, dans le calcul de chaque coefficient, pourra être diminué de 1, en remarquant que CA_{i-1} et $A_1 S_{i-1}$ ont un facteur commun.

Dans ce calcul j'ai mis en dehors le facteur $(1 + a)$, pour que les facteurs $S_2, S_3, \ldots$ ne contiennent pas 1, ce qui fait que le calcul des coefficients est un peu plus court. Mais il serait facile de faire entrer $(1 + a)$ dans le développement si on le jugeait convenable. Dans ce cas, on obtiendrait les coefficients du nouveau développement par l'addition de deux coefficients consécutifs.

Ces calculs seraient impossibles si l'on ne prenait la précaution de faire les neuf premiers multiples de $C, S_2, S_3, S_4, \ldots$. Il est bon aussi de faire également les multiples de $A_1, A_2, A_3, \ldots$, à mesure qu'on les trouve, de manière à pouvoir faire la preuve de chaque multiplication par le renversement des facteurs. Dans une si longue suite d'opérations

dépendant les unes des autres, il ne faut rien négliger pour être sûr du résultat.

Les multiplications se font par la méthode abrégée. Chaque produit partiel doit être écrit avec un chiffre de plus que l'approximation demandée et à une demi-unité de cet ordre.

Voici un exemple de ce calcul; soit $A_4 \times S_6$:

$$\begin{array}{rr} S_6 = & 0{,}0173\ 4306\ 1984\ 4491 \\ A_4 = & 0{,}0245\ 5249\ 0005\ 4000 \\ \hline & 3\ 4686\ 1239\ 6889\ 8 \\ & 6937\ 2247\ 9378\ 0 \\ & 867\ 1530\ 9922\ 2 \\ & 86\ 7153\ 0992\ 2 \\ & 3\ 4686\ 1239\ 7 \\ & 6937\ 2247\ 9 \\ & 1560\ 8755\ 8 \\ & 867\ 2 \\ & 69\ 4 \\ \hline & 4\ 2581\ 5356\ 0362 \end{array}$$

(*voir* le Tableau des vingt-deux premiers coefficients).

La somme de ces coefficients étant égale à

$$\frac{1}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2} = 0{,}5000\ 0000\ 0000,$$

on obtiendra une vérification en faisant cette somme. Cette vérification donne une erreur du quinzième ordre, qui provient soit des termes négligés, soit de la somme des erreurs des divers coefficients.

On obtiendra une autre vérification en faisant $a = -1$. Le résultat sera égal à $\frac{1}{\Gamma(1)} = 1$. L'erreur est encore du même ordre que précédemment.

En examinant ces coefficients, on voit qu'ils varient d'une manière très irrégulière et par soubresauts. Les signes eux-mêmes ne présentent aucune régularité dans leur succession. Les termes vont toujours en diminuant; un seul fait exception à cette règle: A_{14}, qui, après s'être éloigné brusquement de A_{13}, est suivi d'un coefficient A_{15} quarante fois plus grand. Jusqu'à A_{16}, tous les coefficients de rang multiple de 3 sont

positifs et tous les autres négatifs; A_{17} est le premier qui fait exception à cette règle, et, après cela, la régularité est complètement rompue.

Quelle est la loi de succession des signes? Je l'ai vainement cherchée. On s'attendait à voir ces coefficients diminuer avec une plus grande rapidité, vu la rapidité avec laquelle la fonction tend vers zéro. Ce fait est produit par le changement de signe, et nous trouvons un fait analogue dans l'exponentielle e^x, qui a une valeur très grande pour de grandes valeurs positives de x et des valeurs très petites pour des valeurs de x très grandes, mais négatives, et cependant les deux séries ne diffèrent que par les signes des coefficients.

On peut encore obtenir un autre développement de $G(a)$. Au lieu de remplacer S_1 par $-C+ln$, remplaçons au contraire ln par $C+S_1$; les coefficients du développement seront indépendants de S_1, et l'on peut, par conséquent, faire $S_1=0$; alors on aura

$$\frac{1}{a(a+1)}G(a)=e^{-Ca}(1+A_1a+A_2a^2+\ldots).$$

Les coefficients se déduisent les uns des autres de la même manière que précédemment, en faisant $S_1=A_1=0$.

On remarquera qu'ils ont une figure de moins que les premiers et que celui de la première puissance est nul (*voir* le Tableau des vingt et un premiers coefficients).

Cherchons le développement de $\Gamma(a)$:

$$\Gamma(a)=\frac{1}{a(1+a)(1+A_1a+A_2a^2+\ldots)}.$$

Or, le facteur

$$\frac{1}{1+A_1a+A_2a^2+\ldots}$$

ne devient infini pour aucune valeur de a de module moindre que 2; donc on peut le développer dans un cercle de rayon égal à 2 et écrire

$$\Gamma(a)=\frac{1}{a(1+a)(1+A_1a+A_2a^2+\ldots)}=\frac{1}{a(1+a)}(1+B_1a+B_2a^2+\ldots),$$

d'où

$$1 = (1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots)(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

On obtiendra les coefficients B_1, B_2, $B_3, \ldots$ en identifiant les deux membres:

$$B_i + B_{i-1}A_1 + B_{i-2}A_2 + \ldots + A_i = 0.$$

Les multiples déjà formés pour le calcul de A_1, A_2, $A_3, \ldots$ serviront pour le calcul de B_1, B_2, $B_3, \ldots$ (*voir* le Tableau des dix-huit premiers coefficients).

On remarque qu'à partir du cinquième les coefficients des puissances impaires sont négatifs et ceux des puissances paires positifs. On remarquera aussi qu'ils diminuent beaucoup moins rapidement que ceux calculés précédemment et enfin qu'ils se rapprochent de plus en plus de S_2, S_3, $S_4, \ldots$, ou plutôt de $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{2^n}$, en sorte que B_{18} ne diffère de $\frac{1}{2^{19}}$ que de quelques unités du dixième ordre. On verra, un peu plus loin, la raison de tous ces faits.

La régularité des coefficients B_1, B_2, $B_3, \ldots$ témoigne de l'exactitude des coefficients A_1, A_2, $A_3, \ldots$.

Passons à l'étude de

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx = Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

La transcendante $Q(z)$ est une fonction de la même nature que $G(z)$, jouissant de la propriété des fonctions entières, de n'avoir qu'un point essentiel à l'infini.

Nous calculerons, un peu plus loin, la valeur des coefficients c_0, c_1, $c_2, \ldots$; nous allons chercher, tout d'abord, une limite approchée.

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots n c_n = \int_1^\infty e^{-x}(lx)^n \frac{dx}{x} = \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n dx.$$

Or, le maximum du facteur $\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n$ est $\left(\frac{2}{e}\right)^n$; donc

$$1\,.\,2\ldots n c_n < \left(\frac{2}{e}\right)^n \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\,dx < \left(\frac{2}{e}\right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Donc

$$c_n < \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

et, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ par sa valeur approchée, ce qui augmente encore la valeur,

$$c_n < \frac{\sqrt{2e}}{n} \frac{1}{\left[\frac{e}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Appliquons ceci à c_{17}, qui est le dernier coefficient calculé.

$$\begin{array}{rr}
\log 2 = & 0,30103 \\
\log e = & 0,43427 \\
\hline
 & 0,73530 \\
\hline
\log \sqrt{2e} = & 0,36765 \\
\operatorname{colog} 17 = & \bar{2},76955 \\
\operatorname{colog} \left\{\frac{e}{2}(n+1)\right\}^{\frac{n}{2}} = & \overline{12},19758 \\
\hline
\log c_n = & \overline{13},33478
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\log e = & 0,43428 \\
\operatorname{col} 2 = & \bar{1},69897 \\
\log 18 = & 1,25527 \\
\hline
 & 1,38852 \\
 & 8,5 \\
\hline
 & 694260 \\
 & 1110816 \\
\hline
 & 11,802420
\end{array}$$

$$c_n = 0,0000\ 0000\ 0000\ 2163.$$

Le calcul direct donnera, un peu plus loin,

$$c_{17} = 0,0000\ 0000\ 0000\ 1814.$$

La valeur approchée et la valeur exacte diffèrent donc d'environ trois unités et demie du quatorzième ordre.

Occupons-nous à présent du calcul des coefficients de

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

dont nous avons trouvé la valeur sous forme d'intégrale définie et dont nous avons donné une valeur approchée.

Nous avons trouvé

$$x(x+1)\Gamma(x) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots;$$

or

$$x(x+1)\Gamma(x) = \Gamma(x+2) = P(x+2) + Q(x+2)$$

$$= P(x+2) + \frac{1}{e}(x+2) + x(x+1)Q(x)$$

$$= P(x+2) + \frac{1}{e}(x+2) + c_0 x + \begin{array}{c|c|c} c_1 & x^2 + c_2 & x^3 + \dots \\ + c_0 & + c_1 & \end{array}$$

$$= 1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots.$$

Le développement de $P(x+2)$ est facile; ce développement étant fait, on trouvera les coefficients c_0, c_1, $c_2, \dots$ en identifiant les deux membres de l'égalité précédente.

De là

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4} - \dots + \frac{2}{e} = 1,$$

$$-\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^2} + \dots\right) + \frac{2}{e} + c_0 = B_1,$$

$$\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^3} + \dots\right) + (c_0 + c_1) = B_2,$$

$$-\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^4} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^4} + \dots\right) + (c_1 + c_2) = B_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\pm\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^{n+2}} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^{n+2}} + \dots\right) + c_{n-1} + c_n = B_{n+1}.$$

Les parenthèses se calculent très facilement; après avoir formé les quantités $\frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \dots$, on divise successivement ces nombres par $2, 3, 4, \dots$; puis les nombres ainsi formés sont divisés par $2, 3, 4, \dots$, les nombres ainsi formés sont divisés par $2, 3, 4, \dots$, et ainsi de suite (*voir* le Tableau des dix-huit premiers coefficients $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_{17}$. Tous ces coefficients sont positifs, comme on le savait d'avance. On remarque qu'ils sont plus petits que ceux des autres développements).

On voit à présent pourquoi les coefficients B_1, B_2, $B_3, \dots$ se rapprochent de plus en plus de $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$ et sont alternativement

positifs et négatifs. Les coefficients c_0, c_1, c_2, ... diminuant très rapidement, B_1, B_2, B_3, ... se rapprochent aussi très rapidement des crochets

$$\pm\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4^{n+2}}-\cdots\right)=B_{n+1},$$

et le crochet lui-même se rapproche de plus en plus du premier terme $\frac{1}{2^{n+2}}$.

On trouve là une vérification de l'exactitude des coefficients B_1, B_2, B_3, ..., A_1, A_2, A_3, ... Si ces nombres avaient été fautifs, ils auraient troublé la régularité de c_0, c_1, c_2, ...; il en serait résulté, par exemple, que quelques-uns auraient été négatifs.

On peut aussi avoir une vérification des nombres c_0, c_1, c_2, c_3, ... de la manière suivante:

$$Q(1)=\frac{1}{e},$$

$$\begin{aligned}Q(1)&=c_0+c_1+c_2+\cdots\\&=0{,}3678\,7944\,1171\,4142,\\\frac{1}{e}&=0{,}3678\,7944\,1171\,4423,\end{aligned}$$

$$\text{Différence}=0{,}0000\,0000\,0000\,0281.$$

La petite différence trouvée provient soit de l'erreur des coefficients c_0, c_1, c_2, ..., soit des termes qui n'ont pas été calculés.

La concordance parfaite de tous les résultats me donne la conviction que tous ces calculs ne contiennent pas une faute, malgré leur très long développement.

M. Hermite m'a communiqué une forme de $\Gamma(x)$ très élégante et pouvant servir directement au calcul de cette fonction:

$$\Gamma(x)=\int_0^a\xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi+\int_a^\infty\xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi.$$

La première intégrale, en développant en série l'exponentielle, donne naissance à la fonction uniforme

$$a^x\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{x+1}+\frac{a^2}{1.2}\frac{1}{x+2}-\dots\right).$$

Représentons la seconde par $Q(x)$ et faisons

$$Q_n=\int_{a+n}^{a+n+1}\xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi;$$

il viendra, sous forme d'une série évidemment convergente,

$$Q(x)=Q_0+Q_1+Q_2+\cdots$$

Posant ensuite $\xi=\zeta+a+n$, nous aurons

$$Q_n=\int_0^1(a+n+\zeta)^{x-1}e^{-a-n-\zeta}d\zeta$$

ou bien

$$Q_n=e^{-a-n}\int_0^1(a+n+\zeta)^{x-1}e^{-\zeta}d\zeta,$$

et, en développant,

$$\begin{aligned}Q_n&=e^{-a-n}\int_0^1\left[(a+n)^{x-1}+\frac{x-1}{1}(a+n)^{x-2}\zeta+\cdots\right]e^{-\zeta}d\zeta\\&=e^{-a-n}\left[P(1)(a+n)^{x-1}+P(2)\frac{(x-1)}{1}(a+n)^{x-2}\right.\\&\qquad\left.+P(3)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}(a+n)^{x-3}+\dots\right].\end{aligned}$$

Soit

$$S(x)=\frac{a^x}{e^a}+\frac{(a+1)^x}{e^{a+1}}+\frac{(a+2)^x}{e^{a+2}}+\dots,$$

nous aurons l'expression analytique suivante de $Q(x)$, savoir:

$$Q(x)=P(1)S(x-1)+P(2)\frac{x-1}{1}S(x-2)+P(3)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}S(x-3)+\dots;$$

et la convergence de cette série est manifeste, pour toutes les valeurs de x, lorsqu'on suppose $a>1$.

Effectivement on a, dans ce cas, à partir d'une certaine valeur de n, $x - n < 0$, et dès lors on a sensiblement

$$S(x-n) = \frac{a^{x-n}}{e^a} \quad \text{et} \quad P(n) < \frac{1}{n}.$$

Il résulte qu'à partir de cette valeur de n les termes de la série sont plus petits que ceux du développement de $e^{-a}(a+1)^{x-1}$.

Les coefficients $P(1)$, $P(2), \ldots$ sont faciles à calculer, car ils se déduisent les uns des autres au moyen de la relation

$$P(z+1) = zP(z) - \frac{1}{e}.$$

La seule difficulté consistera dans le calcul des fonctions $S(x)$.

On peut, au moyen de la fonction holomorphe $G(x)$, former une infinité d'autres fonctions holomorphes.

Posons, en effet,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= G(x+1) + G(x+2) + \cdots, \\ F_2(x) &= F_1(x) + F_1(x+1) + \cdots, \\ F_3(x) &= F_2(x) + F_2(x+1) + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Toutes ces fonctions seront holomorphes, et pourront se déduire de $F_1(x)$.

Soient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 G(x+1) + A_2 G(x+2) + \cdots, \\ \psi(x) &= \varphi(x) + \varphi(x+1) + \varphi(x+2) + \cdots, \end{aligned}$$

on tire de là

$$\psi(x) = A_1 G(x+1) + (A_1 + A_2) G(x+2) + \cdots + (A_1 + A_2 + \cdot + A_n) G(x+n) + \cdots;$$

donc

$$\begin{aligned} F_2(x) &= G(x+1) + 2G(x+2) + 3G(x+3) + \cdots, \\ F_3(x) &= G(x+1) + 3G(x+2) + 6G(x+3) + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{1.2} G(x+n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$F_k(x) = \frac{1.2\ldots(k-1)}{1.2\ldots(k-1)}G(x+1)$$

$$+ \frac{2.3\ldots k}{1.2\ldots(k-1)}G(x+2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{n(n+1)\ldots(n+k-2)}{1.2\ldots(k-1)}G(x+n) + \cdots$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\{1.2\ldots(k-1)G(x+1) + 2.3\ldots kG(x+2)\ldots$$

$$+ n(n+1)\ldots(n+k-2)G(x+n) + \cdots\}.$$

Faisons

$$f(z) = G(x+1) + zG(x+2) + z^2G(x+3) + z^3G(x+4) + \cdots,$$

et on aura

$$F_k(x) = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\left(z^{k-1}f(z)\right)$$

pour $z = 1$.

Toutes ces fonctions étant holomorphes et par conséquent développables en séries convergentes, il y a intérêt à connaître les coefficients. Avant de procéder à cette recherche, je vais déterminer une limite supérieure.

Si dans la relation trouvée précédemment, à savoir:

$$G(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}\int_\eta^\infty \rho^{-x}e^{-\rho}d\rho + \frac{\eta^{1-x}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-x)\omega i + \eta(\cos\omega + i\sin\omega)}d\omega,$$

on fait $\eta = e$, elle deviendra

$$G(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}\int_e^\infty \rho^{-x}e^{-\rho}d\rho + \frac{e}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{e(\cos\omega + i\sin\omega) + \omega i}\, e^{-x(1+\omega i)}d\omega.$$

Remplaçons successivement x par $x+1$, $x+2$, $x+3, \ldots x+\infty$, et ajoutons; nous obtiendrons

$$F_1(x) = -\frac{\sin \pi x}{\pi}\int_e^\infty \frac{\rho^{-x}e^{-\rho}}{(1+\rho)}d\rho + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{e(\cos\omega + i\sin\omega)}\, e^{-x(1+\omega i)}}{1 - e^{-(1+\omega i)}}d\omega.$$

On obtiendra de même

$$F_k(x) = \pm \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_e^\infty \frac{\rho^{-x+k-1} e^{-\rho}}{(1+\rho)^k} d\rho + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{e(\cos\omega + i \sin\omega)} e^{-x(1+\omega i)}}{\left(1 - e^{-(1+\omega i)}\right)^k} d\omega.$$

Représentons par γ_n et δ_n les coefficients de x^n dans ces deux développements, on aura:

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2 \Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\rho}\rho \cdot \rho^{k-1} [(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}}{(1+\rho)^k} \sin n\omega \, d\omega; \quad \begin{cases} \tang \theta = \pi, \\ \tang \omega = \frac{\pi}{l\rho}. \end{cases}$$

$$\delta_n = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{e(\cos\omega + i\sin\omega)}(1+\omega i)^n}{\left(1 - e^{-e(1+\omega i)}\right)^k} d\omega.$$

Cherchons une limite de γ_n, et pour cela étudions les variations de

$$\frac{e^{-\rho}\rho \cdot \rho^{k-1}[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}}{(1+\rho)^k} = P.$$

La dérivée de P est, à un facteur près essentiellement positif,

$$P' = (k - \rho - \rho^2)\left\{(l\rho)^2 - \frac{(n+1)(\rho+1)}{\rho^2 + \rho - k} l\rho + \pi^2\right\};$$

pour toute valeur de ρ qui rend $\rho^2 + \rho - k < 0$, les deux facteurs de P' sont positifs et P est croissant; lorsque ρ est tel que $\rho^2 + \rho - k > 0$, les deux facteurs P' sont négatifs, jusqu'à ce que le second passe par 0, et P est encore croissant; il passe par son maximum en même temps que le second facteur passe par 0. Ce second facteur ne passe d'ailleurs qu'une fois par 0, pour les valeurs de $\rho > e$. Pour ces valeurs, en effet, $(l\rho)^2 + \pi^2$ va en augmentant et $\frac{(\rho+1)l\rho}{\rho^2 + \rho - k}$ en diminuant, donc

$$(l\rho)^2 - \frac{(n+1)(\rho+1)}{\rho^2 + \rho - k} l\rho + \pi^2$$

ne peut passer qu'une fois par 0.

J'ai dit que $\frac{\rho + 1}{\rho^2 + \rho - k} l\rho$ diminuait à mesure que ρ augmente; pour le prouver prenons la dérivée de

$$\frac{l\rho}{\rho - \frac{k}{\rho + 1}};$$

on aura

$$\frac{1}{\rho - \frac{k}{\rho + 1}}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{l\rho}{\rho - \frac{k}{\rho + 1}}\right] - \frac{\frac{kl\rho}{(\rho + 1)^2}}{\left(\rho - \frac{k}{\rho + 1}\right)^2}$$

quantité évidemment négative, pour $\rho > e$ et rendant $\rho - \frac{k}{\rho + 1} > 0$.

En appliquant le raisonnement fait relativement au développement de

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} \int_1^\infty \rho^{-x} e^{-\rho} d\rho$$

on trouve

$$\gamma_n < \frac{2\mu}{n\pi^2 \Gamma(n + 1)},$$

μ étant le maximum de P. Or ce maximum est moindre que le maximum de $e^{-\rho}\rho[(l\rho)^2 + \pi^2]^{\frac{n+2}{2}}$, multiplié par le maximum de $\frac{\rho^{k-1}}{(1 + \rho)^k}$ qui est $\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1}$, et lorsque $k = 1$, $\frac{1}{1 + e}$.

Donc

$$\gamma_n < \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\Gamma(n + 1)}} \cdot \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1},$$

et lorsque $k = 1$

$$\gamma_n < \frac{4}{(1 + e)\pi^2 \sqrt{\Gamma(n + 1)}}.$$

Cherchons à présent une limite de δ_n.

Pour faire disparaître les imaginaires nous poserons

$$\omega = r \sin\varphi, \quad 1 = r\cos\varphi, \quad r^2 = 1 + \omega^2,$$

$$\frac{1}{e}\sin\omega = r'\sin\psi, \quad 1 - \frac{1}{e}\cos\omega = r'\cos\psi, \quad r'^2 = 1 + \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e}\cos\omega;$$

δ_n deviendra

$$\delta_n = \frac{(-1)^n}{2\pi\Gamma(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n}{r'^k} e^{e\cos\omega}\left\{\cos(\sin\omega + n\varphi - k\psi) + i\sin(\sin\omega + n\varphi - k\psi\right\} d\omega$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi\Gamma(n+1)}\int_{0}^{\pi} \frac{r^n}{r'^k} e^{e\cos\omega} \cos(\sin\omega + n\varphi - k\psi) d\omega.$$

Pour n un peu grand le maximum du facteur $\frac{r^n}{r'^k} e^{e\cos\omega}$ correspond à $\omega = \pi$, donc

$$\delta_n < \frac{e^{-e}(1+\pi^2)^{\frac{n}{2}}}{\left(1+\frac{1}{e}\right)^k \Gamma(n+1)}.$$

Comme application faisons $k = 1$ et $n = 19$.

$$\log \frac{4}{\pi^2\sqrt{\Gamma(n+1)}} = \bar{9},067$$

$$\operatorname{colog}(1+e) = \bar{1},431$$

$$\log \gamma_{19} = \overline{10},498$$

$$\gamma_{19} = 0,0000\,0000\,0314\ldots$$

$$\log \frac{1}{\Gamma(20)} = \overline{18},914$$

$$\log(1+\pi^2)^{9,8} = 9,844$$

$$\log e^{1-e} = \bar{1},262$$

$$\operatorname{colog}(1+e) = \bar{1},431$$

$$\log \delta_{19} = \bar{9},451$$

$$\delta_{19} = 0,0000\,0000\,28\ldots$$

Donc le coefficient de x^{19} dans $F_1(x)$ est inférieur à

0,0000 0000 3 . . .

Le calcul direct donne pour la valeur de ce coefficient

0,0000 0000 0004 . . .

Pour des valeurs considérables de n, la limite de δ_n disparait devant celle de γ_n, et on peut prendre alors pour limite du coefficient de x^n la limite de γ_n, c'est à dire

$$\frac{4}{\pi^2\sqrt{l\Gamma(n+1)}}\cdot\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1}$$

et pour $k=1$

$$\frac{4}{\pi^2(1+e)\sqrt{l\Gamma(n+1)}}.$$

Pour calculer les coefficients de F_1, F_2, F_3, ..., il faut commencer par développer

$$G(x+1),\quad G(x+2),\ldots,$$

multiplier les coefficients par les nombres qui accompagnent chacune de ces fonctions et ajouter les coefficients d'une même puissance. Quant aux coefficients de

$$G(x+1),\quad G(x+2),\ldots,$$

ils se déduisent très-facilement les uns des autres. Supposons qu'on ait obtenu le développement de $G(x+n)$, voici comment on obtiendra $G(x+n+1)$; on a

$$(x+n)G(x+n+1)=G(x+n);$$

si A et B représentent les coefficients de x^{m-1} et x^m, dans $G(x+n+1)$ et B' celui de x^m, dans $G(x+n)$, l'identification donnera

$$A+nB=B'$$

donc

$$B=\frac{B'-A}{n}.$$

C'est ainsi que j'ai obtenu le développement des 22 premiers termes

$$G(x+1),\quad G(x+2),\ldots,\quad G(x+22),$$

après avoir obtenu $G(x+1)$.

Puis j'ai obtenu les 22 premiers coefficients de $F_1(x)$, avec seize décimales. La somme de ces coefficients donne $F_1(1)=e-1$. Cette

somme accuse une erreur trois unités du quatorzième ordre provenant, soit de l'erreur de chaque terme, soit des termes négligés.

On peut encore vérifier ces calculs en faisant

$$x = -1, \quad F(-1) = c.$$

L'erreur est encore du même ordre.

On a

$$F_1(x+1) + G(x+1) = F_1(x)$$
$$F_2(x+1) + F_1(x) = F_2(x)$$
$$F_3(x+1) + F_2(x) = F_3(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{k+1}(x+1) + F_k(x) = F_{k+1}(x).$$

Cette propriété analogue à la propriété fondamentale de $\Gamma(x)$, permettrait de ramener le calcul de $F_k(x)$, au cas où la partie réelle de x est plus petite que 1.

Pour $F_1(x)$, on a encore

$$F_1(x+1) + G(x+1) = F_1(x)$$
$$xF_1(x+2) + G(x+1) = xF_1(x+1).$$

Donc

$$xF_1(x+2) - F_1(x+1) = xF_1(x+1) - F_1(x).$$

Enfin, pour compléter l'analogie, posons avec M. Hermite

$$\frac{1}{f_k(x)} = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\Big\{-1.2\ldots(k-1)\Gamma(-x)$$
$$+ 2.3\ldots k\Gamma(-x-1) - 3.4\ldots(k+1)\Gamma(-x-2) + \cdots\Big\}$$

il viendra

$$F_k(x) \,.\, f_k(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Tableau des coefficients du développement

$$G(x+1)+G(x+2)+\ldots.$$

$B_0 = e$

$B_1 = -0{,}5963\ 4736\ 2323\ 1937$

$B_2 = -0{,}6101\ 8642\ 4288\ 0669$

$B_3 = +0{,}1408\ 3144\ 6255\ 5907$

$B_4 = +0{,}1135\ 3209\ 0799\ 3344$

$B_5 = -0{,}0502\ 6804\ 2916\ 5430$

$B_6 = -0{,}0020\ 9527\ 8940\ 5085$

$B_7 = +0{,}0058\ 8951\ 4875\ 3865$

$B_8 = -0{,}0013\ 5660\ 7820\ 5651$

$B_9 = -0{,}0000\ 8533\ 6852\ 4170$

$B_{10} = +0{,}0001\ 0653\ 6695\ 8557$

$B_{11} = -0{,}0000\ 2115\ 0329\ 4320$

$B_{12} = -0{,}0000\ 0012\ 2186\ 8494$

$B_{13} = +0{,}0000\ 0092\ 1350\ 0580$

$B_{14} = -0{,}0000\ 0019\ 8178\ 0777$

$B_{15} = +0{,}0000\ 0001\ 1008\ 6976$

$B_{16} = +0{,}0000\ 0000\ 3810\ 5123$

$B_{17} = -0{,}0000\ 0000\ 1072\ 7134$

$B_{18} = +0{,}0000\ 0000\ 0111\ 5704$

$B_{19} = +0{,}0000\ 0000\ 0004\ 1052$

$B_{20} = -0{,}0000\ 0000\ 0003\ 1803$

$B_{21} = +0{,}0000\ 0000\ 0000\ 4960$

$B_{22} = -0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0274$

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x(x+1)(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots).$$

$$A_1 = -0{,}4227\;8433\;5098\;4671$$

$$A_2 = -0{,}2330\;9373\;6421\;7867$$

$$A_3 = +0{,}1910\;9110\;1387\;6915$$

$$A_4 = -0{,}0245\;5249\;0005\;4000$$

$$A_5 = -0{,}0176\;4524\;4550\;1443$$

$$A_6 = +0{,}0080\;2327\;3022\;2673$$

$$A_7 = -0{,}0008\;0432\;9775\;6044$$

$$A_8 = -0{,}0003\;6083\;7816\;2548$$

$$A_9 = +0{,}0001\;4559\;6142\;1399$$

$$A_{10} = -0{,}0000\;1754\;5859\;7517$$

$$A_{11} = -0{,}0000\;0258\;8995\;0224$$

$$A_{12} = +0{,}0000\;0133\;8501\;5466$$

$$A_{13} = -0{,}0000\;0020\;5474\;3152$$

$$A_{14} = -0{,}0000\;0000\;0159\;5268$$

$$A_{15} = +0{,}0000\;0000\;6275\;6218$$

$$A_{16} = -0{,}0000\;0000\;1273\;6143$$

$$A_{17} = +0{,}0000\;0000\;0092\;3397$$

$$A_{18} - +0{,}0000\;0000\;0012\;0028$$

$$A_{19} = -0{,}0000\;0000\;0004\;2202$$

$$A_{20} = +0{,}0000\;0000\;0000\;5240$$

$$A_{21} = -0{,}0000\;0000\;0000\;0140$$

$$A_{22} = -0{,}0000\;0000\;0000\;0067$$

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots.$$

$a_1 = + 1,0000\ 0000\ 0000\ 0000$

$a_2 = + 0,5772\ 1566\ 4901\ 5329$

$a_3 = - 0,6558\ 7807\ 1520\ 2538$

$a_4 = - 0,0420\ 0263\ 5034\ 0952$

$a_5 = + 0,1665\ 3861\ 1382\ 2915$

$a_6 = - 0,0421\ 9773\ 4555\ 5443$

$a_7 = - 0,0096\ 2197\ 1527\ 8770$

$a_8 = + 0,0072\ 1894\ 3246\ 6630$

$a_9 = - 0,0011\ 6516\ 7591\ 8591$

$a_{10} = - 0,0002\ 1524\ 1674\ 1149$

$a_{11} = + 0,0001\ 2805\ 0282\ 3882$

$a_{12} = - 0,0000\ 2013\ 4854\ 7741$

$a_{13} = - 0,0000\ 0125\ 0493\ 4758$

$a_{14} = + 0,0000\ 0113\ 3027\ 2314$

$a_{15} = - 0,0000\ 0020\ 5633\ 8420$

$a_{16} = + 0,0000\ 0000\ 6116\ 0950$

$a_{17} = + 0,0000\ 0000\ 5002\ 0075$

$a_{18} = - 0,0000\ 0000\ 1181\ 2746$

$a_{19} = + 0,0000\ 0000\ 0104\ 3425$

$a_{20} = + 0,0000\ 0000\ 0007\ 7826$

$a_{21} = - 0,0000\ 0000\ 0003\ 6962$

$a_{22} = + 0,0000\ 0000\ 0000\ 5100$

$a_{23} = - 0,0000\ 0000\ 0000\ 0207$

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{I(x)} = e^{-Cx} x(x+1)(1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots).$$

C	$=$	$0,4227\ 8433\ 5098\ 4671$
A_2	$=$	$-\ 0,3224\ 6703\ 3424\ 1132$
A_3	$=$	$+\ 0,0673\ 5230\ 1053\ 1981$
A_4	$=$	$+\ 0,0314\ 1168\ 5394\ 9022$
A_5	$=$	$-\ 0,0143\ 3334\ 5686\ 2387$
A_6	$=$	$+\ 0,0004\ 2566\ 6389\ 5753$
A_7	$=$	$+\ 0,0009\ 2680\ 6472\ 5897$
A_8	$=$	$-\ 0,0002\ 1927\ 6360\ 3432$
A_9	$=$	$-\ 0,0000\ 0265\ 0983\ 9844$
A_{10}	$=$	$+\ 0,0000\ 1021\ 5199\ 3474$
A_{11}	$=$	$-\ 0,0000\ 0185\ 4328\ 3265$
A_{12}	$=$	$-\ 0,0000\ 0000\ 6534\ 1544$
A_{13}	$=$	$+\ 0,0000\ 0005\ 8247\ 6956$
A_{14}	$=$	$-\ 0,0000\ 0001\ 0048\ 4862$
A_{15}	$=$	$+\ 0,0000\ 0000\ 0251\ 4687$
A_{16}	$=$	$+\ 0,0000\ 0000\ 0188\ 6871$
A_{17}	$=$	$-\ 0,0000\ 0000\ 0035\ 7806$
A_{18}	$=$	$+\ 0,0000\ 0000\ 0002\ 0025$
A_{19}	$=$	$+\ 0,0000\ 0000\ 0000\ 3314$
A_{20}	$=$	$-\ 0,0000\ 0000\ 0000\ 0878$
A_{21}	$=$	$+\ 0,0000\ 0000\ 0000\ 0069$

Tableau des coefficients du développement

$$I(x) = \frac{1}{x(x+1)}(1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots).$$

$B_1 = + 0{,}4227\ 8433\ 5098\ 4671$

$B_2 = + 0{,}4118\ 4033\ 0426\ 4396$

$B_3 = + 0{,}0815\ 7691\ 9247\ 0863$

$B_4 = + 0{,}0742\ 4901\ 0753\ 5137$

$B_5 = - 0{,}0002\ 6698\ 2068\ 7450$

$B_6 = + 0{,}0111\ 5404\ 5718\ 1309$

$B_7 = - 0{,}0028\ 5264\ 5821\ 1553$

$B_8 = + 0{,}0021\ 0393\ 3340\ 6975$

$B_9 = - 0{,}0009\ 1957\ 3838\ 8259$

$B_{10} = + 0{,}0004\ 9038\ 8450\ 8226$

$B_{11} = - 0{,}0002\ 4094\ 1435\ 8311$

$B_{12} = + 0{,}0001{,}2167\ 3806\ 5265$

$B_{13} = - 0{,}0000\ 6079\ 2891\ 3175$

$B_{14} = + 0{,}0000\ 3045\ 3557\ 0349$

$B_{15} = - 0{,}0000\ 1523\ 4935\ 8969$

$B_{16} = + 0{,}0000\ 0762\ 1779\ 6964$

$B_{17} = - 0{,}0000\ 0381\ 2110\ 4003$

$B_{18} = + 0{,}0000\ 0190\ 6491\ 6577$

Tableau des coefficients du développement

$$I(x) = P(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots.$$

$c_0 = 0{,}2193\ 8393\ 4395\ 5203$

$c_1 = 0{,}0978\ 4319\ 7216\ 6725$

$c_2 = 0{,}0356\ 0349\ 1928\ 4726$

$c_3 = 0{,}0110\ 7089\ 5446\ 0110$

$c_4 = 0{,}0030\ 2761\ 1195\ 8767$

$c_5 = 0{,}0007\ 4265\ 8300\ 4889$

$c_6 = 0{,}0001\ 6575\ 6256\ 0585$

$c_7 = 0{,}0000\ 3403\ 1394\ 8701$

$c_8 = 0{,}0000\ 0648\ 2609\ 8154$

$c_9 = 0{,}0000\ 0115\ 3713\ 5309$

$c_{10} = 0{,}0000\ 0019\ 2937\ 4300$

$c_{11} = 0{,}0000\ 0003\ 0464\ 9169$

$c_{12} = 0{,}0000\ 0000\ 4560\ 7157$

$c_{13} = 0{,}0000\ 0000\ 0649\ 6268$

$c_{14} = 0{,}0000\ 0000\ 0088\ 3033$

$c_{15} = 0{,}0000\ 0000\ 0011\ 4985$

$c_{16} = 0{,}0000\ 0000\ 0001\ 4247$

$c_{17} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 1814$

La connaissance des coefficients que nous avons calculés pourra être utile dans beaucoup de cas. On pourra s'en servir pour calculer commodément les dérivées, et même les intégrales successives des fonctions $G(x)$, $\Gamma(x)$, $Q(x)$ et les intégrales définies qui en dépendent.

Comme application, je vais calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}, \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}:$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1 + \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{3}A_2 + \tfrac{1}{4}A_3 + \ldots,$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 1 - \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{3}A_2 - \tfrac{1}{4}A_3 + \ldots,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} + \int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)}.$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1{,}0000\ 0000\ 0000\ 0000 \\
\tfrac{1}{4}A_3 &= 0{,}0477\ 7277\ 5346\ 9229 \\
\tfrac{1}{7}A_6 &= 0{,}0011\ 4618\ 1860\ 3239 \\
\tfrac{1}{10}A_9 &= 0{,}0000\ 1455\ 9614\ 2140 \\
\tfrac{1}{13}A_{12} &= 0{,}0000\ 0010\ 2961\ 6574 \\
\tfrac{1}{16}A_{15} &= 0{,}0000\ 0000\ 0392\ 2264 \\
\tfrac{1}{18}A_{17} &= 0{,}0000\ 0000\ 0005\ 1300 \\
\tfrac{1}{19}A_{18} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 6317 \\
\tfrac{1}{21}A_{20} &= 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0250 \\
\hline
& \ 1{,}0489\ 3362\ 0181\ 1313
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} A_1 = 0{,}2113\ 9216\ 7549\ 2335$
$\frac{1}{3} A_2 = 0{,}0776\ 9791\ 2140\ 5956$
$\frac{1}{5} A_4 = 0{,}0049\ 1049\ 8001\ 0800$
$\frac{1}{6} A_5 = 0{,}0029\ 4087\ 4091\ 6907$
$\frac{1}{8} A_7 = 0{,}0001\ 0054\ 1221\ 9505$
$\frac{1}{9} A_8 = 0{,}0000\ 4009\ 3090\ 6950$
$\frac{1}{11} A_{10} = 0{,}0000\ 0159\ 5078\ 1593$
$\frac{1}{12} A_{11} = 0{,}0000\ 0021\ 5749\ 5852$
$\frac{1}{14} A_{13} = 0{,}0000\ 0001\ 4676\ 7368$
$\frac{1}{15} A_{14} = 0{,}0000\ 0000\ 0010\ 6351$
$\frac{1}{17} A_{16} = 0{,}0000\ 0000\ 0074\ 9185$
$\frac{1}{20} A_{19} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 2110$
$\frac{1}{21} A_{21} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0010$

$0{,}2970\ 8391\ 1685\ 4922$

$1{,}0489\ 3362\ 0181\ 1313$
$0{,}2970\ 8391\ 1685\ 4922$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\Gamma(x+2)} = 0{,}7518\ 4970\ 8495\ 6391$$

$A_0 = 1{,}0000\ 0000\ 0000\ 0000$
$\frac{1}{2} A_1 = 0{,}2113\ 9216\ 7549\ 2335$
$\frac{1}{6} A_5 = 0{,}0029\ 4087\ 4091\ 6907$
$\frac{1}{7} A_6 = 0{,}0011\ 4618\ 1860\ 3239$
$\frac{1}{8} A_7 = 0{,}0001\ 0054\ 1221\ 9505$
$\frac{1}{12} A_{11} = 0{,}0000\ 0021\ 5749\ 5852$
$\frac{1}{13} A_{12} = 0{,}0000\ 0010\ 2961\ 6574$
$\frac{1}{14} A_{13} = 0{,}0000\ 0001\ 4676\ 7368$
$\frac{1}{19} A_{18} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 6317$
$\frac{1}{20} A_{19} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 2110$
$\frac{1}{21} A_{20} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0250$
$\frac{1}{22} A_{21} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 0007$

$1{,}2155\ 8009\ 8112\ 0464$

$$\tfrac{1}{3}A_2 = 0{,}0776\,9791\,2140\,5956$$
$$\tfrac{1}{4}A_3 = 0{,}0477\,7277\,5346\,9229$$
$$\tfrac{1}{5}A_4 = 0{,}0049\,1049\,8001\,0800$$
$$\tfrac{1}{9}A_8 = 0{,}0000\,4009\,3090\,6950$$
$$\tfrac{1}{10}A_9 = 0{,}0000\,1455\,9614\,2140$$
$$\tfrac{1}{11}A_{10} = 0{,}0000\,0159\,5078\,1593$$
$$\tfrac{1}{15}A_{14} = 0{,}0000\,0000\,0010\,6351$$
$$\tfrac{1}{16}A_{15} = 0{,}0000\,0000\,0392\,2264$$
$$\tfrac{1}{17}A_{16} = 0{,}0000\,0000\,0074\,9185$$
$$\tfrac{1}{18}A_{17} = 0{,}0000\,0000\,0005\,1300$$
$$\tfrac{1}{23}A_{22} = 0{,}0000\,0000\,0000\,0003$$

$$0{,}1304\,3743\,3754\,5771$$
$$1{,}2155\,8009\,8112\,0464$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{I(x)} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{I(x+2)} = 1{,}0851\,4266\,4357\,4693$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{I(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{I(x+2)} = 0{,}7518\,4970\,8495\,6391$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{I(x)} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{I(x+2)} = 1{,}8369\,9237\,2853\,1084$$

On trouverait, de la même manière,

$$\int_0^1 \frac{dx}{I(x)} = 0{,}5412\,3573\,9587\,6182,$$

$$\int_0^{-1} \frac{dx}{I(x)} = 0{,}1837\,2070\,6646\,1288.$$

SUR LA FONCTION EULÉRIENNE.

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

M. Prym a représenté $\Gamma(x)$ par la somme de deux fonctions $P(x)$ et $Q(x)$, dont la seconde est holomorphe, la première ayant pour expression

$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2\,.\,3\ldots n(x+n)} + \cdots,$$

ou encore

$$eP(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \cdots + \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} + \cdots.$$

Cette forme analytique, entièrement explicite, de la transcendante $P(x)$ conduit, par une voie facile, à reconnaître que l'équation $P(x) = 0$ a une infinité de racines réelles. Soit, pour un moment,

$$S_n = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \cdots + \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)},$$

$$R_n = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\left[\frac{1}{x+n} + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \cdots\right],$$

de sorte qu'on ait

$$eP(x) = S_n + R_n.$$

Je remarque d'abord qu'en limitant la valeur de x supposée réelle par les conditions

$$n - 1 < -x < n,$$

a série $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \cdots$ est toujours positive, tandis que le

facteur $x(x+1)\ldots(x+n-1)$ est du signe de $(-1)^n$. Le reste R_n est donc négatif pour toute valeur impaire de n. Cela étant, faisons

$$n = 2m + 1,$$

on trouvera, par un calcul facile, que

$$S_n = \frac{X_m}{x(x+1)\cdots(x+2m)},$$

le numérateur étant le polynôme suivant:

$$\begin{aligned} X_m = \;& (x+2)^2(x+3)(x+4)\ldots(x+2m) \\ &+ (x+4)^2(x+5)(x+6)\ldots(x+2m) \\ &+ (x+6)^2(x+7)(x+8)\ldots(x+2m) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (x+2m)^2 + 1. \end{aligned}$$

Cette quantité est positive pour les valeurs de x satisfaisant à la condition $x + 2m < 0$, les facteurs qui entrent au premier degré dans les divers termes étant tous négatifs et en nombre pair. D'ailleurs, le dénominateur $x(x+1)\ldots(x+2m)$ est négatif, comme nous l'avons déjà dit; S_n étant donc, comme R_n, une quantité négative, nous voyons que dans l'intervalle considéré pour la variable, c'est-à-dire entre les deux pôles consécutifs, $x = -2m$, $x = -(2m+1)$, l'équation $P(x) = 0$ n'a aucune racine réelle. J'ajoute qu'il en est de même entre $x = -1$ et $x = -2$, car alors $S_2 = \frac{x+2}{x(x+1)}$, quantité positive dans cet intervalle ainsi que R_2. Si l'on passe à l'intervalle compris entre $x = -3$ et $x = -4$, on obtient

$$S_4 = \frac{(x+2)^2(x+3) + x + 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)};$$

or le numérateur de cette expression changeant de signe lorsqu'on fait varier x de -3 à -4, on ne peut prononcer sûrement ni sur la présence ni sur l'absence de racines. Mais, au delà, nous allons établir qu'elles existent d'une manière absolument certaine. Je remarque dans ce but que, $P(-3-\frac{1}{2}) = 0,23\ldots$ étant positif et moindre que $\frac{1}{e} = 0,36\ldots$, il en résulte que, pour toute valeur du nombre entier n supérieure à 3, $P(-n-\frac{1}{2})$ est négatif. De l'équation de M. Prym

$$P(x+1) = xP(x) - \frac{1}{e},$$

nous déduisons en effet

$$P\left(-4-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{e} + P\left(-3-\frac{1}{2}\right)}{4+\frac{1}{2}},$$

et l'on voit que le second membre, étant négatif, a une valeur absolue, évidemment moindre que $\frac{1}{e}\cdot$ Cela étant, la relation

$$P\left(-5-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{e} + P\left(-4-\frac{1}{2}\right)}{5+\frac{1}{2}}$$

fait voir que $P\left(-5-\frac{1}{2}\right)$ est encore une quantité négative, et, de proche en proche, il est clair qu'on établira qu'il en est de même pour toute valeur de l'entier n. Cela posé, l'expression

$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} - \cdots$$

montre que, en faisant successivement

$$x = -(2m+1) - \varepsilon,$$
$$x = -(2m+2) + \varepsilon,$$

où ε est infiniment petit et positif, on obtient pour résultat deux quantités infiniment grandes et positives. Par conséquent, il existe une racine de l'équation $P(x) = 0$, comprise entre $-(2m+1)$ et $-\left(2m+1+\frac{1}{2}\right)$, puis une entre les limites $-\left(2m+1+\frac{1}{2}\right)$ et $-(2m+2)$.

A ce qui vient d'être démontré, j'ajoute la remarque que, en exprimant les racines par les formules

$$x = -(2m+1) - \xi_m,$$
$$x = -(2m+2) + \xi'_m,$$

les quantités ξ_m et ξ'_m, qui sont l'une et l'autre positives, décroissent indéfiniment quand m augmente. C'est dire que les zéros de la fonction $P(x)$ tendent de plus en plus à se confondre avec les pôles.

SUR QUELQUES POINTS DANS LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR

CH. HERMITE et R. LIPSCHITZ.

1. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Lipschitz.

.... Vous connaissez et vous admirez comme moi, le mémoire de DIRICHLET sur les valeurs moyennes, où il commence par donner aux quantités près de l'ordre $\sqrt{n}$, l'expression de

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n) = F(n),$$

$\varphi(i)$ désignant le nombre des diviseurs de i. DIRICHLET emploie d'abord l'expression connue:

$$F(n) = E\left(\frac{n}{1}\right) + E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots,$$

puis celle qu'il a découverte:

$$F(n) = -\mu\nu + \sum_{1}^{\mu}{}_i E\left(\frac{n}{i}\right) + \sum_{1}^{\nu}{}_j E\left(\frac{n}{j}\right),$$

où il suppose $\mu\nu = n$. En voici une autre encore dont on peut conclure son résultat. Soit pour abreger

$$\nu = E(\sqrt{n}),$$

j'obtiens:

$$F(n) = 2\sum_{1}^{\nu}{}_i E\left(\frac{n}{i}\right) - \nu^2.$$

Pour le démontrer, considérez la quantité $F(n+1)$, et supposez en premier lieu que $n+1$ ne soit pas un carré, de sorte qu'on ait:

$$E(\sqrt{n+1}) = \nu .$$

Dans la différence

$$F(n+1) - F(n) = 2\sum_1^{\nu} {}_i \left[E\left(\frac{n+1}{i}\right) - E\left(\frac{n}{i}\right) \right],$$

les seuls termes qui ne seront point nuls, seront évidemment ceux où $\frac{n+1}{i}$ est entier, de sorte que la quantité

$$E\left(\frac{n+1}{i}\right) - E\left(\frac{n}{i}\right)$$

devient alors égale à l'unité. Par conséquent

$$F(n+1) - F(n)$$

est le double du nombre des diviseurs de $n+1$, qui sont au dessous de sa racine carrée où bien le nombre total de tous ses diviseurs.

Supposons en second lieu

$$E(\sqrt{n+1}) = \nu + 1 ,$$

je puis écrire

$$F(n+1) - F(n) = 2\sum_1^{\nu} {}_i \left| E\left(\frac{n+1}{i}\right) - E\left(\frac{n}{i}\right) \right| + 2E\left(\frac{n+1}{\nu+1}\right) - (\nu+1)^2 + \nu^2 .$$

Or on a

$$2E\left(\frac{n+1}{\nu+1}\right) - (\nu+1)^2 + \nu^2 = 2(\nu+1) - 2\nu - 1 = 1 ,$$

de sorte qu'alors nous trouvons, deux fois le nombre des diviseurs moindres que $\sqrt{n+1}$, plus l'unité, c'est à dire encore la somme de tous les diviseurs de $n+1$.

Paris 12 Mai 1883.

2. Extrait d'une lettre de M. Lipschitz à M. Hermite.

.... En cherchant la cause de la symétrie parfaite qui se manifeste dans la formule par laquelle vous avez exprimée la somme

$$F(n) = \sum_{t=1}^{t=n} f(t),$$

$f(t)$ dénotant le nombre des diviseurs de t, j'ai fait l'observation que l'on peut représenter d'une manière semblable la somme

$$F_s(n) = \sum_{t=1}^{t=n} f_s(t),$$

où $f_s(t)$ désigne le nombre de ceux diviseurs de t qui sont en même temps des puissances s-ièmes d'un nombre, et où $f_s(t)$ coïncide avec $f(t)$ pour $s = 1$. Une valeur quelconque de s étant choisie écrivons dans une première ligne horizontale les nombres naturels de 1 à n, dans une seconde ligne tous les multiples de 2^s non supérieurs à n, dans une troisième ligne tous les multiples de 3^s non supérieurs à n, et ainsi de suite jusqu'à la puissance p^s la plus grande qui ne surpasse pas n, de manière que nous ayons

$$\begin{array}{l} 1,\quad 2,\quad\quad 3, \ldots\ldots\ldots n \\ 2^s,\quad 2^s.2,\quad 2^s.3\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ p^s. \end{array}$$

Ce tableau contient tous les nombres non supérieurs à n representés comme les produits d'un nombre quelconque et d'une puissance s-ième d'un nombre, autant de fois qu'une telle représentation peut se faire. Donc le nombre de tous les termes du tableau doit être égal à la somme requise

$$F_s(n) = \sum_{t=1}^{t=n} f_s(t).$$

Le nombre des termes de la première ligne horizontale étant n, de la seconde ligne horizontale $\left[\frac{n}{2^s}\right]$, où l'entier le plus grand contenu dans une quantité z est designé par $[z]$, on a pour $F_s(n)$ l'expression

$$F_s(n) = [n] + \left[\frac{n}{2^s}\right] + \left[\frac{n}{3^s}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^s}\right].$$

Mais si l'on détermine le nombre des termes contenus dans les lignes verticales, on trouve pour la première le nombre

$$\left[n^{\frac{1}{s}}\right] = p,$$

pour la seconde le nombre

$$\left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}\right],$$

et ainsi de suite jusqu'à la dernière qui contient un seul terme. Cela étant le second mode d'énumération donne pour la fonction $F_s(n)$ l'expression

$$F_s(n) = \left[n^{\frac{1}{s}}\right] + \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}\right] + \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{3^{\frac{1}{s}}}\right] + \cdots + \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}}\right],$$

qui devient identique avec la première seulement pour $s = 1$.

Comme les lignes horizontales sont construites de sorte que le nombre des termes de chaque ligne soit supérieur ou égal au nombre des termes de la suivante, et comme les lignes verticales ont la propriété correspondante, l'énumération peut aussi s'exécuter de la manière suivante. Nous déterminons le nombre des termes des lignes horizontales successives de la première jusqu'à la μ-ième ligne inclusivement

$$\mu^s, \quad \mu^s \cdot 2, \quad \mu^s \cdot 3, \ldots \mu^s \cdot \nu,$$

où ν a la valeur

$$\left[\frac{n}{\mu^s}\right].$$

et après cela nous nous déterminons le nombre des termes des lignes verticales de la première jusqu'à la ν-ième ligne. Alors nous avons compris tous les termes, deux fois d'une part, une fois de l'autre. Les termes compris deux fois sont évidemment ceux qui appartiennent aux μ premières lignes horizontales et en même temps aux ν premières lignes verticales, dont le nombre total est égal au produit $\mu\nu$. C'est donc ce nombre qu'il faut soustraire de la somme des deux sommes mentionnées pour avoir exactement $F_s(n)$. D'où vient la troisième expression

$$F_s(n) = -\mu\nu + \sum_{x=1}^{x=\mu}\left[\frac{n}{x^s}\right] + \sum_{y=1}^{y=\nu}\left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{y^{\frac{1}{s}}}\right].$$

On parviendra au même résultat si l'on fait usage, pour transformer la première expression de $F_s(n)$, de la formule générale, exposée par Dirichlet dans le mémoire: *Ueber ein die Division betreffendes Problem* (Monatsbericht der Berliner Academie, Januar 1851, et Crelles Journal f. Mathematik, Bd 47). La même formule de Dirichlet a été appliquée pour la transformation de diverses séries arithmétiques par Mr Ch. Zeller dans une communication: *Ueber Summen von grössten Ganzen bei arithmetischen Reihen* (Nachrichten d. k. G. d. W. von Göttingen, Mai 1879).

Dans la troisième expression de $F_s(n)$ supposons le nombre μ égal à

$$\left[n^{\frac{1}{1+s}}\right].$$

Alors on parvient à la formule

$$F_s(n) = -\mu^2 + \sum_{x=1}^{x=\mu}\left[\frac{n}{x^s}\right] + \sum_{y=1}^{y=\mu}\left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{y^{\frac{1}{s}}}\right],$$

qui se change dans la vôtre pour le cas $s = 1$. Actuellement on a les rélations suivantes

$$\mu^{1+s} \overline{\gtrless} n < (\mu + 1)^{1+s},$$

$$\nu \overline{\gtrless} \frac{n}{\mu^s} < \nu + 1.$$

On conclut de la première

$$\mu \overline{\overline{<}} \frac{n}{\mu^s};$$

c'est pourquoi ν doit être ou égal à μ ou plus grand que μ, c'est à dire $\overline{\overline{>}} \mu + 1$. Dans le premier cas la formule en question est démontrée. Dans le second cas on a nécessairement

$$\mu \overline{\overline{<}} \frac{n^{\frac{1}{s}}}{\nu^{\frac{1}{s}}} \overline{\overline{<}} \frac{n^{\frac{1}{s}}}{(\mu+1)^{\frac{1}{s}}} < \mu + 1.$$

Partant toutes les $(\nu - \mu)$ quantités

$$\left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{(\mu+1)^{\frac{1}{s}}}\right], \ldots \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{\nu^{\frac{1}{s}}}\right]$$

ont une valeur égale à μ. Or en étendant la somme

$$\sum_{y=1}^{y=\nu} \left[\frac{n^{\frac{1}{s}}}{y^{\frac{1}{s}}}\right]$$

d'abord de 1 à μ, puis de $\mu + 1$ a ν, la seconde partie a pour valeur $(\nu - \mu)\mu$, qui ajoutée à la quantité $-\mu\nu$ donne le résultat $-\mu^2$. Donc la troisième formule est transformée dans la quatrième, ce qu'il fallait démontrer.

Bonn, 6 Juin 1883.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME DE TOUS LES NOMBRES ALGÉBRIQUES RÉELS.[1]

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publié d. l. journ. d. Borchardt, t. 77, pag. 258.)

On nomme, en général, *nombre algébrique* réel un nombre réel ω qui est racine d'une équation non identique de la forme

$$(1) \qquad a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

où n, a_0, a_1, ... a_n sont des nombres entiers; nous pouvons supposer que les nombres n et a_0 sont positifs, que les coefficients a_0, a_1, ... a_n n'ont pas de diviseur commun et que l'équation (1) est irréductible; ces suppositions étant faites, il résulte des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique et de l'algèbre que l'équation (1) admettant pour racine un nombre algébrique réel déterminé est une équation entièrement déterminée; inversement à une équation de la forme (1) correspondent au plus autantde nombres algébriques réels racines de cette équation, qu'il y a d'unités dans le degré n.

Les nombres algébriques réels constituent par leur ensemble un système de nombres que nous désignerons par (ω); ainsi qu'il résulte de considérations élémentaires, ce système (ω) de nombres est de telle nature qu'il existe une infinité de nombres de (ω) dont la différence avec un nom-

[1] M. Georg Cantor ayant eu la bonté de nous promettre une série d'articles nouveaux concernant ses recherches sur la théorie des ensembles, nous pensons rendre service à nos lecteurs en reproduisant d'abord ici en traduction française les principaux mémoires de M. Cantor qui se rapportent à ce sujet; ils nous paraissent en effet indispensables à l'intelligence des nouveaux qui vont suivre et que l'auteur publiera de même en français. La traduction a été revue et corrigée par l'auteur. *Le rédacteur.*

bre quelconque α est moindre qu'une quantité donnée si petite qu'elle soit. Cette remarque rend d'autant plus frappante, au premier abord, la propriété suivante: *l'on peut faire correspondre un à un les nombres du système* (ω), aux nombres ν appartenant à la série des entiers positifs, suite qui sera désignée par (ν), de telle façon qu'à chaque nombre algébrique réel ω réponde un nombre entier positif déterminé ν, et qu'inversement à chaque nombre entier positif ν réponde un nombre réel algébrique ω complètement déterminé; en d'autres termes l'on peut imaginer les nombres du système (ω) rangés suivant une certaine loi en une suite infinie

$$(2) \qquad \omega_1, \omega_2, \ldots . \omega_\nu, \ldots .$$

dans laquelle figurent tous les nombres de la catégorie (ω), chacun d'eux se trouvant dans la suite (2) à une place déterminée indiquée par l'indice correspondant. Une fois que l'on a trouvé une loi permettant de ranger ainsi les nombres de (ω), on en déduira d'autres de celle-là par des modifications que l'on pourra choisir à volonté; il nous suffira donc d'indiquer, comme nous le faisons dans le § 1, le mode de classement qui nous paraît reposer sur le plus petit nombre de considérations.

Pour donner une application de cette propriété du système de tous les nombres algébriques réels, j'ajoute au § 1 le § 2 dans lequel je montre que, lorsque l'on considère comme donnée sous la forme (2) une suite quelconque de nombres réels, l'on peut déterminer, dans chaque intervalle $(\alpha \ldots . \beta)$ donné d'avance, des nombres η non contenus dans cette suite (2). En combinant les propositions contenues dans les §§ 1 et 2, l'on obtient ainsi une démonstration nouvelle du théorème suivant démontré pour la première fois par LIOUVILLE (Journ. de Math. réd. p. Liouville I[e] série, t. XVI, 1851): dans chaque intervalle $(\alpha \ldots . \beta)$ donné d'avance il y a une infinité de nombres transcendants c'est à dire de nombres qui ne sont pas algébriques réels. De plus le théorème du § 2 donne la raison pour laquelle on ne peut pas faire correspondre un à un aux nombres entiers de la série (ν) les nombres réels formant un système continu de nombres, c'est à dire par exemple, tous les nombres réels qui sont ≥ 0 et ≤ 1. Je suis ainsi arrivé à trouver d'une façon nette la différence essentielle qu'il y a entre un système continu de nombres et un système de nombres de l'espèce de celui qui est formé par l'ensemble de tous les nombres algébriques réels.

§ 1.

Revenons à l'équation (1) à laquelle satisfait un nombre algébrique réel ω et qui, d'après les suppositions faites plus haut, est une équation entièrement déterminée; appelons *hauteur* du nombre ω la somme des valeurs absolues des coefficients augmentée du nombre $n - 1$, n étant le degré de l'équation; en désignant cette hauteur par N et appliquant une notation connue pour désigner les valeurs absolues des nombres, on a, par suite,

$$N = n - 1 + [a_0] + [a_1] + \dots + [a_n]. \tag{3}$$

Cette hauteur N est, par conséquent, pour chaque nombre algébrique réel, un nombre entier positif déterminée; inversement, à un nombre entier positif donné N ne correspondent qu'un nombre limité de nombres algébriques réels ayant pour hauteur N; soit $\varphi(N)$ ce nombre, l'on aura, par exemple, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$. Les nombres du système (ω), c'est à dire tous les nombres algébriques réels peuvent donc être rangés dans l'ordre suivant: on prendra comme premier nombre ω_1, le seul nombre de hauteur $N = 1$; on écrira à la suite par ordre de grandeurs croissantes les deux nombres algébriques réels de hauteur $N = 2$ et on les désignera par ω_2, ω_3; puis, à leur suite et par ordre de grandeurs croissantes, on écrira les quatre nombres de hauteur $N = 3$; d'une manière générale, après que l'on aura ainsi compté et classé les nombres de la catégorie (ω) jusqu'à une hauteur déterminée $N = N_1$, on rangera à leur suite et par ordre de grandeurs croissantes les nombres réels algébriques de hauteur $N = N_1 + 1$. L'on obtient ainsi le système de tous les nombres algébriques réels sous la forme:

$$\omega_1, \ \omega_2, \dots \omega_\nu, \dots,$$

et l'on peut, en se reportant à cette classification, parler du $\nu^{\text{ième}}$ nombre algébrique réel, sans omettre aucun nombre du système (ω).

§ 2.

Lorsque l'on a une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres se succédant suivant une loi déterminée quelconque

$$(4) \qquad u_1,\ u_2,\ \ldots.,\ u_\nu,\ \ldots.$$

l'on peut, dans chaque intervalle $(\alpha \ldots. \beta)$ donné d'avance, déterminer un nombre η qui ne se trouve pas dans la suite (4); il existe, par conséquent, une infinité de tels nombres. Voici la démonstration de ce théorème.

Partons de l'intervalle donné d'avance $(\alpha \ldots. \beta)$ et soit $\alpha < \beta$; désignons par α', β' les deux premiers nombres de la suite (4) divers entre eux, qui sont distincts de α, β et qui se trouvent dans cet intervalle, et soit $\alpha' < \beta'$; désignons de même par α'', β'', les deux premiers nombres de notre suite divers entre eux, qui se trouvent dans l'intervalle $(\alpha' \ldots. \beta')$ et soit $\alpha'' < \beta''$; d'après cette même loi, formons un intervalle suivant $(\alpha''' \ldots. \beta''')$, et ainsi de suite. D'après cette définition, les nombres α', α'', ... sont des nombres déterminés u_{k_1}, u_{k_2}, ... u_{k_ν} de notre suite (4) dont les indices k_ν croissent constamment, et la même chose a lieu pour les nombres β', β'' ....; de plus les nombres α', α'', ... sont de grandeurs croissantes, les nombres β', β'', ... de grandeurs décroissantes; chacun des intervalles $(\alpha \ldots. \beta)$, $(\alpha' \ldots. \beta')$, $(\alpha'' \ldots. \beta'')$, ... comprend tous ceux qui le suivent. L'on ne peut alors concevoir que deux cas.

Ou bien le nombre des intervalles, que l'on peut former ainsi est fini; soit $(\alpha^{(\nu)} \ldots. \beta^{(\nu)})$ le dernier d'entre eux; comme dans cet intervalle se trouve au plus un nombre de la suite (4), l'on peut prendre dans cet intervalle un nombre η qui n'appartient pas à la suite (4), et le théorème est ainsi démontré dans ce cas.

Ou bien le nombre des intervalles ainsi formés est infini; alors, comme les nombres α, α', α'' .... croissent constamment sans croître à l'infini, ils ont une certaine limite α^∞; de même les nombres β, β', β'', ... qui décroissent constamment ont une certaine limite β^∞. Si $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (ce qui se présente toujours en appliquant cette méthode au système (ω) des nombres

algébriques réels), on s'assure facilement en revenant à la définition des intervalles, que le nombre $\eta = \alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ ne peut pas être compris dans notre suite; car si ce nombre η était compris dans notre suite, l'on aurait $\eta = u_p$, p étant un indice déterminée; mais cela n'est pas possible, car u_p ne se trouve pas dans l'intervalle $(\alpha^{(p)} \ldots . \beta^{(p)})$, tandis que le nombre η s'y trouve d'après sa définition. Si, au contraire $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$, tout nombre η, compris dans l'intervalle $(\alpha^{\infty} \ldots . \beta^{\infty})$ ou égal à l'une des limites, remplit la condition voulue de ne pas appartenir à la suite (4).

Les théorèmes, que nous venons de démontrer peuvent être généralisés de différentes façons; nous n'indiquerons ici que la proposition suivante: «soit $v_1, v_2, \ldots ., v_\nu, \ldots .$ une suite finie ou infinie de nombres linéairement indépendants, c'est à dire de nombres tels qu'il n'existe entre eux aucune équation de la forme

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots . + a_n v_n = 0,$$

les coefficients $a_1, a_2, \ldots . a_n$ étant des entiers qui ne sont pas tous nuls à la fois; concevons le système (Ω) de tous les nombres Ω qui peuvent être représentés par des fonctions rationnelles à coefficients entiers des nombres donnés $v_1, v_2, \ldots . v_\nu, \ldots .$; alors, dans tout intervalle $(\alpha \ldots . \beta)$, il y a une infinité de nombres qui ne sont pas contenus dans le système (Ω).»

En effet, l'on voit, à l'aide de considérations analogues à celles qui ont été employées dans le § 1, que les nombres de la catégorie (Ω) peuvent être rangés en une suite de la forme

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots . \Omega_\nu, \ldots .,$$

d'où résulte le théorème en question d'après la proposition démontrée § 2.

M. B. Miningerade a démontré, par une réduction aux principes de Galois, un cas très-particulier du théorème que nous venons d'indi-

quer, à savoir le cas dans lequel les nombres $v_1, v_2, \ldots v_\nu$ sont en nombre fini et dans lequel le degré des fonctions rationnelles, qui servent à former les nombres de la catégorie (Ω) est donné d'avance. (Voir Math. Annalen de Clebsch et Neumann, T. III p. 497.)

Berlin, le 23 Décembre 1873.

UNE CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

MÉMOIRE DE

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Extrait du Journal de Borchardt, vol. 84.)

Si on peut faire correspondre élément par élément deux *ensembles* bien définies M et N par une opération à sens unique (et, quand on peut le faire d'une manière, on peut le faire aussi de beaucoup d'autres), convenons, pour la suite, de nous exprimer en disant que ces *ensembles* ont la même *puissance*, ou encore qu'elles sont *équivalentes*.

Nous appellerons *parties intégrantes* d'un *ensemble* toutes les autres *ensembles* M', dont les éléments sont en même temps éléments de M.

Si deux *ensembles* M et N ne sont pas de même *puissance*, ou bien M aura la même *puissance* qu'une partie intégrante de N, ou bien N la même qu'une partie intégrante de M; dans le premier cas nous appelons la *puissance* de M plus petite, dans le second nous l'appelons plus grande que la *puissance* de N.

Quand les ensembles à considérer sont finis, c. a. d. composés d'un nombre fini d'éléments, la notion de la *puissance*, comme il est facile de le voir, répond alors à celle du *nombre* dans la signification de *dénombrement* et pas conséquent aussi à celle du *nombre entier positif*, puisqu'en effet deux ensembles de cette nature n'ont la même puissance que dans l'hypothèse où le nombre de leurs éléments est le même.

Une *partie intégrante* d'un ensemble *fini* a toujours une puissance plus petite que l'ensemble lui-même; *ce fait n'a plus lieu dans les ensembles infinis, c. à. d. composés d'un nombre infini d'éléments*. De cette seule circonstance, qu'un ensemble infini M est une partie intégrante d'une autre N

ou que l'on peut faire correspondre un à un les éléments de M à une partie intégrante de N, par une opération à sens unique, on ne peut aucunement conclure que sa puissance est plus petite que celle de N; cette conclusion n'est justifiée, que si l'on sait que la puissance de M n'est pas égale à celle de N; de même, N étant partie intégrante de M ou tel que ses éléments correspondent un à un à sens unique à une partie intégrante de M, cette circonstance ne suffit pas pour que la puissance de M soit plus grande que celle de N.

Pour rappeler un exemple simple, soit M la série des nombres entiers positifs ν, N la série des nombres entiers positifs pairs 2ν; N est alors une partie intégrante de M et néanmoins M et N sont de même puissance.

La série des nombres entiers positifs ν offre, comme il est facile de le montrer, la *plus petite* de toutes les puissances qui se présentent dans les *ensembles infinis.* Néanmoins la *classe* des ensembles qui ont cette plus petite puissance est *extraordinairement riche* et *étendue.* A cette classe appartiennent, par exemple, tous les ensembles que M. DEDEKIND appelle »corps finis» dans ses belles recherches sur les nombres algébriques (cf. leçons de DIRICHLET sur la théorie des nombres, deux. où troisième édit. Brunswick 1871 et 1879); de même les ensembles que j'ai considérés et que j'ai appelés »systèmes de points de la $\nu^{\text{ème}}$ espèce» (cf. Mathematische Annalen de CLEBSCH et NEUMANN, t. V, p. 129) sont de la *première* (c. a. d. de la plus petite) puissance.

Chaque ensemble se présentant comme série simplement infinie, avec le terme général a_ν, appartient évidemment à cette même *classe*; mais deplus les séries doubles et en général les séries n^{iples} avec le terme général $a_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n}$ (où ν_1, ν_2, ... ν_n parcourent indépendamment l'un de l'autre tous les nombres entiers positifs) appartiennent aussi à cette classe. J'ai même démontré que l'ensemble (ω) de tous les nombres algébriques réels (et on pourrait ajouter: de tous les nombres algébriques complexes) peut se concevoir sous la forme d'une série avec le terme général ω_ν; c'est à dire que l'ensemble (ω), aussi bien que chacune de ses parties intégrantes infinies, a la *puissance* de la série de nombres entiers 1, 2, 3, ... ν, ... (Conf. Journal de Borchardt, t. 77, pag. 258). A l'égard des *ensembles* de cette *première classe*, on a les théorèmes suivants, faciles à démontrer:

»M étant un ensemble de la *première* classe (c. a. d. de la *puissance* de la série des nombres entiers positifs), chaque partie intégrante infinie de M a la même puissance.»

»M', M'', M''' .... étant une série finie ou simplement infinie *d'ensembles*, dont chacun a la *première* puissance, l'ensemble M, qui resulte de la réunion de M', M'', M''' ...., a aussi la *première puissance*.»

Nous allons maintenant dans ce qui va suivre examiner au point de vue de leur puissance les *ensembles* qu'on appelle continus et n^{iples}. D'après un théorème, que j'ai démontré dans le § 2 du traité cité (Jour. d. Borchardt, t. 77, pag. 260) il est certain, que ces ensembles n'appartiennent pas à la première classe, c. a. d. qu'ils ont une puissance supérieure à la première.

Les recherches de RIEMANN, de HELMHOLTZ et d'autres après eux sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, partent, comme on sait, de la notion d'un *ensemble continu*, d'étendue n, et en font consister le *caractère essentiel* en ce que leurs éléments dépendent de n variables réelles, continues, indépendantes l'une de l'autre, en sorte qu'à chaque élément de *l'ensemble* appartient un système de valeurs $x_1, x_2, \ldots. x_n$ admissible, et réciproquement à chaque système de valeurs $x_1, x_2, \ldots. x_n$ admissible appartient un certain élément de *l'ensemble*.

Le plus souvent, comme il résulte de la *suite* de ces recherches, on suppose en outre *tacitement* que la correspondance des éléments de *l'ensemble* et du système de valeurs $x_1, x_2, \ldots. x_n$ posée comme base, est *continue*, en sorte qu'à chaque changement infiniment petit du système de valeurs $x_1, x_2, \ldots. x_n$ répond un changement infiniment petit de l'élément correspondant de *l'ensemble* et réciproquement, à chaque changement infiniment petit des éléments de *l'ensemble*, un changement semblable des valeurs de ses *coordonnées*.

Quant à savoir si cette supposition suffit, ou s'il faut la compléter par des conditions encore plus spéciales, pour pouvoir regarder comme *bien fondée* et *incontestable* l'idée que ces auteurs se sont faite de l'ensemble n^{iple} et continu, c'est une question que nous passerons d'abord sous silence(¹); nous avons seulement à montrer ici, que si on laisse cette supposition de côté, (ce qui arrive bien souvent dans les traités de ces auteurs), c. a. d.

(¹) La réponse à cette question à laquelle nous reviendrons dans une autre circonstance, ne me paraît donner lieu, à aucune difficulté sérieuse.

si par rapport à la correspondance entre *l'ensemble* et ses *coordonnées* on n'admet *aucune limitation*, ce caractère, considéré par les auteurs comme *essentiel* (d'après lequel un ensemble n^{iple} continue est telle qu'on peut en déterminer les éléments par n coordonnées réelles, continues, indépendantes l'une de l'autre) devient *absolument sans valeur.*

Comme notre travail le montrera, on peut même déterminer les éléments d'un *ensemble continu* d'étendue n par une *seule* coordonnée réelle et continue au moyen d'une opération à sens *unique.* Il suit de là, que si on ne fait aucune supposition par rapport à la *nature* de la *correspondance,* le *nombre* des coordonnées réelles continues et indépendantes qui peuvent servir à la détermination à sens unique des éléments d'un *ensemble continu d'étendue n,* peut être *tout nombre donnée m* et que par conséquent *on ne peut* le considérer comme *caractère invariable* d'un ensemble donné.

En me posant la question de savoir si un ensemble continu de n dimensions peut être reliée au moyen d'une opération à sens unique à un ensemble continu d'une *seule* dimension, de telle sorte qu'à chaque élément de l'une d'elles réponde un élément, et un seulement, de l'autre, il s'est trouvé *qu'une telle correspondance existe toujours.*

D'après cela une *surface continue* peut *être rapportée complètement par une opération à sens unique à une ligne continue; la même chose est vraie des corps continus et des ensembles continus géométriques à un nombre quelconque de dimensions.*

En appliquant l'expression introduite plus haut, nous pouvons donc dire que la *puissance* d'un *ensemble continu* d'étendue n et choisi à volonté est *égale* à la *puissance* d'un *ensemble* d'étendue *simple,* comme p. ex. d'un *segment de droite continue et limitée.*

§ 1.

Comme deux *ensembles continus,* d'un nombre *égal* de dimensions, peuvent, au moyen de fonctions analytiques, se rapporter l'une à l'autre complètement et à sens unique, par rapport au but que nous poursuivons (et qui est de montrer qu'on peut joindre d'une façon complète et à sens unique des ensembles continues qui n'ont pas le même nombre de dimen-

sions) tout se ramène, comme on l'entrevoit facilement, à la démonstration du théorème suivant:

(A). »*Soient* $x_1, x_2, \ldots . x_n$ *n grandeurs réelles, variables, indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs* $\geqq 0$ *et* $\leqq 1$, *et soit t une autre variable comprise dans les mêmes limites* $(0 \leqq t \leqq 1)$, *on peut faire correspondre cette grandeur t au système des n grandeurs* $x_1, x_2, \ldots . x_n$ *de telle sorte qu'à chaque valeur déterminée de t appartienne un système de valeurs déterminées* $x_1, x_2, \ldots . x_n$ *et vice versa à chaque système de valeurs déterminées* $x_1, x_2, \ldots . x_n$ *une certaine valeur de t.*»

Comme conséquence de ce théorème se présente cet autre que nous avons en vue:

(B). »*On peut faire correspondre d'une façon complète et à sens unique un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu d'une seule dimension; deux ensembles continus l'une de n, l'autre de m dimensions, n étant* $\gtreqless m$, *ont la même puissance; les éléments d'un ensemble continu à n dimensions peuvent être déterminés à sens unique par une seule coordonnée t continue et réelle; mais ils peuvent aussi être déterminés à sens unique par un système de m coordonnées continues* $t_1, t_2, \ldots . t_m$.»

§ 2.

Pour démontrer (A) nous partons de ce théorème connu que tout nombre *irrationnel* $e \gtrless {}^0_1$ peut être représenté d'une manière complètement déterminée, sous la forme d'une fraction continue infinie:

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \cdots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_\nu, \ldots .)$$

où les α_ν sont des nombres positifs entiers rationnels.

A chaque nombre *irrationnel* $e \gtrless {}^0_1$ appartient une série déterminée infinie de nombres entiers positifs α_ν et réciproquement chaque série semblable détermine un certain nombre *irrationnel* $e \gtrless {}^0_1$.

Soient maintenant $e_1, e_2, \ldots . e_n$ n grandeurs variables indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, qu'on pose alors:

$$\begin{array}{l} e_1 = (\alpha_{1,1}, \ \alpha_{1,2}, \ \ldots . \ \alpha_{1,\nu}, \ \ldots .) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \ \alpha_{\mu,2}, \ \ldots . \ \alpha_{\mu,\nu}, \ \ldots .) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = (\alpha_{n,1}, \ \alpha_{n,2}, \ \ldots . \ \alpha_{n,\nu}, \ \ldots .) \end{array}$$

ces n nombres irrationnels déterminent à sens unique un $\overline{n+1}^{\text{ème}}$ nombre irrationnel $d \gtrless {}^0_1$:

$$d = (\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots . \ \beta_\nu, \ \ldots .),$$

si on établit entre les nombres α et β le rapport suivant:

$$(1) \qquad \beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \qquad \begin{cases} \mu = 1, \ 2, \ \ldots . \ n \\ \nu = 1, \ 2, \ \ldots . \ \infty \end{cases}$$

Mais aussi de l'autre côté si on part d'un nombre irrationnel $d \gtrless {}^0_1$, il détermine la série des β_ν et au moyen de (1) les séries des $\alpha_{\mu,\nu}$; par conséquent d détermine complètement et à sens unique le système des n nombres irrationnels $e_1, e_2, \ldots . e_n$. De cette considération résulte tout d'abord le théorème suivant:

(C). »*Soient* $e_1, e_2, \ldots . e_n$ *n grandeurs variables indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$ *et soit d une autre variable irrationnelle dans les même limites, on peut faire correspondre d'une manière complète et à sens unique cette grandeur d et le système des n grandeurs* $e_1, e_2, \ldots . e_n$.»

§ 3.

Après avoir démontré, dans le paragraphe précédent, le théorème (C), nous avons maintenant à démontrer le théorème suivant:

(D). »*Une grandeur variable e, qui peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$, *peut se joindre à sens unique à une variable x comportant toutes les valeurs réelles, c. a. d. rationnelles et irrationnels, qui sont* $\geqq 0$ *et* $\leqq 1$, *en sorte qu'à chaque valeur irrationnelle*

de $e \gtrless^0_1$ *corresponde une valeur réelle de* $x \gtreqless^0_1$ *et une seulement et que réciproquement à chaque valeur réelle de* x *corresponde une certaine valeur irrationnelle de* e.»

Car une fois ce théorème démontré, qu'on se représente (en l'appliquant), comme correspondantes aux $n+1$ grandeurs variables désignées dans le § 2 par $e_1, e_2, \ldots e_n$ et d, les autres variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ et t, reliées aux premières par une opération à sens unique, chacune des dernières variables pouvant prendre sans restriction toutes les valeurs réelles $\geqq 0$ et $\leqq 1$. Comme nous avons établi une correspondance complète et à sens unique entre la variable d et le système des n variables $e_1, e_2, \ldots e_n$ dans § 2, on obtient de cette manière une association complète, déterminée et à sens unique de la variable continue t et du système des n variables continues $x_1, x_2, \ldots x_n$, ce qui démontrera la vérité du théorème (A).

Nous n'aurons donc plus à nous occuper dans la suite que de la démonstration du théorème (D); qu'on nous permette d'employer, pour plus de brièveté, un formalisme simple que nous allons d'abord faire connaître.

Nous appellerons *ensemble linéaire* de nombres réels tout ensemble bien définie de nombres réels, distincts les uns des autres, c. a. d. inégaux en sorte qu'un seul et même nombre ne se présente pas plus d'une fois comme élément dans un *ensemble linéaire.*

Les variables réelles, qui se présentent dans le cours de ce travail, sont toutes de telle nature que le *champ* de chacune d'elles, c. a. d. l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est un *ensemble linéaire* donné; nous n'appuierons donc plus dans la suite sur cette supposition que partout nous ferons tacitement.

De deux variables de cette nature a et b nous dirons qu'elles n'ont aucune liaison, si aucune des valeurs que peut prendre a n'est égale à une valeur de b c. a. d. les deux ensembles de valeurs que peuvent prendre les variables a et b, n'ont pas d'éléments communs, si on dit que a et b sont sans liaison.[1]

---

(1) Deux ensembles M et N ou bien n'ont aucune liaison, si elles n'ont aucun élément qui leur soit commun; ou bien elles sont reliées par un troisième ensemble déterminé P c. a. d. par l'ensemble de leurs éléments communs. Je désigne l'ensemble P par $\mathfrak{D}(M, N)$.

Si on a une série finie ou infinie a', a'', a''', ... $a^{(\nu)}$, ... de variables bien définies ou de constantes telles que $a^{(\nu)}$ et $a^{(\mu)}$ n'ont aucune liaison entre eux, on peut définir une variable a par ce caractère que son champ se compose de l'ensemble des champs de a', a'', ... $a^{(\nu)}$, ...; réciproquement une variable donnée a peut se décomposer d'après les modes les plus divers en d'autres a', a'', ... qui n'ont aucune liaison deux à deux; dans ces deux cas nous exprimons le rapport de la variable a aux variables a', a'', ... $a^{(\nu)}$, ... par la formule suivante:

$$a \equiv \{a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots\}$$

Cette formule exprime à la fois 1° que toute valeur que pourrait prendre une des variables $a^{(\nu)}$ est aussi une valeur qui convient à la variable a; 2° que toute valeur que peut recevoir a peut être prise aussi par une des grandeurs $a^{(\nu)}$, et par une seulement. Pour expliquer cette formule, soit par exemple φ une variable qui peut prendre toutes les valeurs rationnelles ≥ 0 et ≤ 1, e une variable qui peut prendre toutes les valeurs irrationnelles de l'intervalle $(0 \ldots 1)$ et enfin x une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles, rationnelles et irrationnelles ≥ 0 et ≤ 1, on a:

$$x \equiv \{\varphi, e\}$$

Soit a et b deux grandeurs variables de telle nature qu'on puisse les joindre l'une à l'autre d'une façon complète et à sens unique, en d'autres termes si le champ de l'une et de l'autre a la même puissance, nous appellerons a et b équivalentes l'un à l'autre et nous l'exprimerons par une des deux formules $a \sim b$ ou $b \sim a$. D'après cette définition de l'équivalence de deux grandeurs variables il suit immédiatement que $a \sim a$; et que, si $a \sim b$ et $b \sim c$, on a toujours aussi $a \sim c$.

Dans la suite du travail le théorème ci-dessous dont nous pouvons omettre la démonstration à cause de sa simplicité, trouvera son application en divers endroits:

(E). »*Soit* a', a'', ... $a^{(\nu)}$ *une série finie ou infinie de variables ou de constantes qui n'ont aucune liaison deux à deux,* b', b'', ... $b^{(\nu)}$, ... *une autre série de la même nature, si à chaque variable* $a^{(\nu)}$ *de la première série répond une variable déterminée* $b^{(\nu)}$ *de la seconde et si ces variables corres-*

pondantes sont constamment équivalentes l'une à l'autre, c. a. d. que $a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$, *on aura toujours aussi:* $a \sim b$,
si

$$a \equiv \{a', \ a'', \ \ldots . \ a^{(\nu)}, \ \ldots . \}$$

et

$$b \equiv \{b', \ b'', \ \ldots . \ b^{(\nu)}, \ \ldots . \}»$$

§ 4.

Au point où nous en sommes arrivés de notre travail, il n'y a plus qu'à démontrer le théorème (D) dans § 3. Pour cela prenons comme point de départ qu'on peut écrire tous les nombres rationnels qui sont $\geqq 0$ et $\leqq 1$, sous la forme d'une série simplement infinie:

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \ldots . \ \varphi_\nu, \ \ldots .$$

avec un terme général φ_ν.

On peut le prouver de la façon la plus simple, comme il suit: $\frac{p}{q}$ étant la forme irréductible pour un nombre rationnel $\geqq 0$ et $\leqq 1$, où par conséquent p et q sont des nombres entiers non négatifs avec le plus grand commun diviseur 1, qu'on pose $p + q = N$. Dès lors à chaque nombre $\frac{p}{q}$ appartient une valeur déterminée, entière et positive de N, et réciproquement à cette valeur de N appartient toujours un *nombre fini* de quantités $\frac{p}{q}$. Si on imagine maintenant les nombres $\frac{p}{q}$ rangés dans ordre tel que ceux qui appartiennent à des valeurs plus petites de N précèdent ceux pour lesquels N a une valeur plus grande, et que de plus les nombres $\frac{p}{q}$, pour lesquels N a la même valeur se suivent les uns les autres par ordre de grandeur, les plus grands après les plus petites, chacun des nombres $\frac{p}{q}$ vient occuper une place parfaitement déterminée dans une série simplement infinie, dont le terme général sera désigné par φ_ν. Mais cette proposition peut aussi se tirer comme conclusion de ce j'ai dit ailleurs,

que l'ensemble (ω) de tous les nombres réelles algébriques peut se mettre sous la forme d'une série infinie:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots . \omega_\nu, \ldots .$$

avec le terme général ω_ν; cette propriété de l'ensemble (ω) se transmet en effet à l'ensemble de tous les nombres rationnels ≥ 0 et ≤ 1, parce que cet dernier ensemble est une partie intégrante du premier (ω).

Soit maintenant e la variable quise présente dans le théorème (D) et qui peut prendre toutes les valeurs numériques réelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, à l'exception des nombres φ_ν.

Qu'on prenne ensuite dans l'intervalle $(0 \ldots . 1)$ une série quelconque infinie de nombres ε_ν *irrationnels* et soumise aux conditions qu'en général on a $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ et que $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 1$; soit par exemple:

$$\varepsilon_\nu = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}.$$

Qu'on désigne par f une variable, qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, à l'exception des valeurs ε_ν, par g une autre variable, qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, à l'exception des ε_ν et des φ_ν.

Nous disons que:

$$e \sim f.$$

En effet d'après la notation du § 3 on a:

$$e \equiv \{g, \varepsilon_\nu\}$$

et:

$$f \equiv \{g, \varphi_\nu\}.$$

Mais on a: $g \sim g$; $\varepsilon_\nu \sim \varphi_\nu$; nous concluons donc d'après (E) que $e \sim f$.

Le théorème à démontrer (D) est donc ramené au théorème suivant:

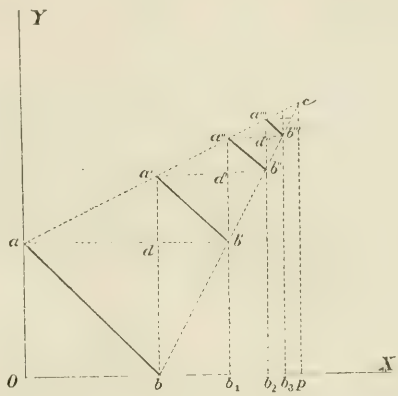
(F). »*Une variable f qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$, *à l'exception des valeurs d'une série donnée* ε_ν, *soumise aux conditions que* $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ *et que* $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 1$, *peut se joindre d'une façon complète et à sens unique à une variable x qui peut prendre toutes les valeurs* ≥ 0 *et* ≤ 1; *en d'autres termes, on a* $f \sim x$.»

§ 5.

Nous appuyons la démonstration de (F) sur les théorèmes suivants (G), (H), (J):

(G). »*Soit y une variable, qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$ *à l'exception seulement de* 0, *x une variable qui comporte toutes les valeurs de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$ *sans exception, on a: $y \sim x$.*»

La démonstration de ce théorème (G) se fait de la manière la plus simple en considérant la courbe ci-contre, dont les abscisses à partir de 0 représentent la grandeur x, et les ordonnées la grandeur y. Cette courbe est composée d'un nombre infini de segments de droites $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, ... $\overline{a^{(\nu)}b^{(\nu)}}$, ... (qui sont parallèles entre eux et deviennent infiniment petits quand ν croît à l'infini) et du point isolé c, dont ces segments se rapprochent asymptotiquement. Mais les points extrêmes a, a', ... $a^{(\nu)}$ devant être considérées comme faisant partie de la courbe, au contraire les points extrêmes b, b', ... $b^{(\nu)}$, ... doivent être regardés comme en dehors de cette courbe. Les longueurs représentées dans la figure sont:



$$\overline{Op} = \overline{pc} = 1; \ \overline{Ob} = \overline{bp} = \overline{Oa} = \frac{1}{2};$$

$$\overline{a^{(\nu)}d^{(\nu)}} = \overline{d^{(\nu)}b^{(\nu)}} = \overline{b_{\nu-1}b_\nu} = \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

On se convainc que, tandis que l'abscisse x prend toutes les valeurs de 0 à 1, l'ordonnée y les prend aussi toutes, à l'exception seulement de la valeur 0.

Le théorème (G) étant ainsi démontré, on obtient en appliquant les formules de transformation: $y = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}$; $y = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$, la généralisation de (G):

(H). »*Une variable z, qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle* $(\alpha \ldots . \beta)$, *où* $\alpha \gtrless \beta$, *à l'exception de la seule valeur* α, *est équivalente à une variable u qui peut prendre toutes les valeurs du même intervalle* $(\alpha \ldots . \beta)$ *sans exception.*»

De là nous arrivons immédiatement au théorème suivant:

(J). »*ω étant une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle* $(\alpha \ldots . \beta)$ *à l'exception des deux valeurs extrêmes α et β, u étant la même variable que dans* (H), *on a* $\omega \sim u$.»

En effet: soit γ une valeur quelconque entre α et β; qu'on introduise comme auxiliaires quatre nouvelles variables ω', ω'', u'' et z.

Supposons que z soit la même variable que dans (H), que ω' prenne toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \ldots . \gamma)$ à l'exception des deux valeurs extrêmes α et γ; qu'on donne à ω'' toutes les valeurs de l'intervalle $(\gamma \ldots . \beta)$ à l'exception de la seule valeur extrême β; soit enfin u'' une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(\gamma \ldots . \beta)$ y compris les valeurs extrêmes.

On a alors:

$$\omega \equiv \{\omega', \omega''\}$$

$$z \equiv \{\omega', u''\}$$

Mais par suite de (H) on a $\omega'' \sim u''$; nous concluons donc que $\omega \sim z$. Mais d'après (H) on a aussi: $z \sim u$; par conséquent on a encore: $\omega \sim u$, ce qui démontre le théorème (J).

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème (F) comme il suit:

En renvoyant à la signification des variables f et x dans l'enoncée de (F), nous introduisons certaines variables auxiliaires:

$$f', f'', \ldots . f^{(\nu)}, \ldots .$$

et

$$x'', x^{IV}, \ldots . x^{(2\nu)} \ldots$$

Soient: f' une variable qui comporte toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots . \varepsilon_1)$ à l'exception de la seule valeur extrême ε_1; $f^{(\nu)}$ pour $\nu > 1$ une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{\nu-1} \ldots . \varepsilon_\nu)$ à l'exception des deux valeurs extrêmes $\varepsilon_{\nu-1}$ et ε_ν; $x^{(2\nu)}$ une variable qui comporte toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{2\nu-1} \ldots . \varepsilon_{2\nu})$ sans exception.

Si on joint encore aux variables $f', f'', \ldots . f^{(\nu)}, \ldots .$ la quantité constante 1, toutes ces grandeurs prises ensemble ont le même champ que f, c. a. d. qu'on a:

$$f \equiv \{f', f'', \ldots . f^{(\nu)}, \ldots . 1\}$$

De même on se convainc que:

$$x \equiv \{f', x'', f''', x^{\mathrm{IV}}, \ldots . f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots . 1\}$$

Mais par suite du théorème (J) on a:

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)};\ \text{puis: } f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)};\ 1 \sim 1;$$

d'où à cause du théorème (E) § 3:

$$f \sim x.$$

§ 6.

Je vais maintenant donner une démonstration beaucoup plus courte pour le théorème (D); si je ne me suis pas borné à celle-là, cela est venu de ce que les théorèmes auxiliaires (F), (G), (H), (I), qui ont servi à une démonstration plus compliquée, ont de l'intérêt en eux-mêmes. — Nous désignons par x, comme plus haut, une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, y compris les valeurs extrêmes; soit e une variable qui ne comporte que les valeurs irrationnelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$; il faut démontrer que $x \sim e$.

Nous nous représentons, comme dans § 4, les nombres rationnels ≥ 0 et ≤ 1 sous forme de série, avec le terme général φ_ν, où ν a à parcourir la série des nombres 1, 2, 3, ... Nous prenons ensuite dans

l'intervalle $(0 \ldots . 1)$ une série infinie quelconque de nombres irrationnels distincts entre eux; soit η_ν le terme général de cette série $\left(\text{p. ex: } \eta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}\right)$.

Qu'on désigne par h une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$ à l'exception des φ_ν aussi bien que des η_ν.

D'après le formalisme adoptée dans § 3 on a alors:

(1) $$x \equiv \{h,\ \eta_\nu,\ \varphi_\nu\}$$

et

$$e \equiv \{h,\ \eta_\nu\}$$

Nous pouvons aussi écrire la dernière formule comme il suit:

(2) $$e \equiv \{h,\ \eta_{2\nu-1},\ \eta_{2\nu}\}$$

Si maintenant nous remarquons que:

$$h \sim h;\ \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1};\ \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu}$$

et si nous appliquons aux deux formules (1) et (2) le théorème (E) § 3, nous obtenons $x \sim e$; c. q. f. d.

§ 7.

La pensée viendrait naturellement de choisir, pour la démonstration de (A) la forme de représentation des fractions *décimales* infinies au lieu des fractions *continues* que nous avons employées; il semblerait que cette méthode nous aurait conduit plus promptement au but; mais au contraire elle entraine avec elle une difficulté sur laquelle je veux attirer l'attention ici; et c'est la raison qui m'a fait renoncer dans ce travail à l'emploi des fractions décimales.

Si on a p. ex. deux variables x_1 et x_2 et qu'on pose:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots . + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \ldots .$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots . + \frac{\beta_\nu}{10^\nu} + \ldots .$$

en supposant que les nombres α_ν, β_ν deviennent des nombres entiers ≥ 0 et ≤ 9 et ne prennent pas constamment, à partir d'un certain ν, la valeur 0 (excepté lorsque x_1 ou x_2 est égal à 0), ces expressions de x_1, x_2 seront déterminées, dans tous les cas avec une signification unique, c. a. d. x_1 et x_2 déterminent les séries infinies de nombres α_ν et β_ν, et réciproquement.

Si maintenant on tire de x_1 et x_2 un nombre:

$$t = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \ldots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \ldots$$

en posant:

$$\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu; \ \gamma_{2\nu} = \beta_\nu$$

pour

$$\nu = 1, 2, \ldots \infty$$

il s'établit un rapport à sens unique entre le système x_1, x_2 et la variable t; car un seul système de valeurs x_1, x_2 conduit à une valeur donnée de t. Mais la variable t, et c'est la particularité à remarquer ici, *ne prend pas toutes les valeurs de l'intervalle* $(0 \ldots 1)$, elle a une variabilité restreinte, tandis que x_1 et x_2 ne sont soumis à aucune restriction dans ce même intervalle. En effet, toutes les valeurs de la somme de la série:

$$\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \ldots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \ldots,$$

où, à partir d'un certain $\nu > 1$, tous les $\gamma_{2\nu-1}$ ou tous $\gamma_{2\nu}$ ont la valeur zéro, doivent être considérées comme au dehors des limites de variabilité de t, parce qu'elles ramèneraient à des représentations, par fractions décimales, de x_1 ou x_2, qui sont finies et par conséquent inadmissibles.

§ 8.

Le travail que nous avions en vue étant terminé dans les paragraphes précédents, quelques remarques plus générales pourront trouver place ici, comme conclusion.

Le principe (A) et par suite le principe (B) peuvent être généralisés, de sorte que des *ensembles continus* d'un nombre *infiniment grand de dimensions ont la même puissance que les ensembles continus d'une seule dimension; toutefois cette généralisation est essentiellement liée à l'hypothèse que les dimensions infiniment nombreuses forment elles-mêmes un ensemble de la première classe ou puissance.* Au lieu du théorème (A) on a le suivant:

(A'). »*Soit* $x_1, x_2, \ldots . x_\mu$, *une série simplement infinie de grandeurs variables, réelles, indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs* $\geqq 0$ *et* $\leqq 1$, *et soit t une autre variable avec les mêmes limites* $(0 \leqq t \leqq 1)$, *on peut faire correspondre par une opération à sens unique cette grandeur t au système des* $x_1, x_2, \ldots . x_\mu, \ldots .$, *qui sont en nombre infini.*»

Ce théorème (A') se ramène, à l'aide du théorème (D) § 3, au suivant:

(C'). »*Soit* $e_1, e_2, \ldots . e_\mu, \ldots .$ *une série infinie de grandeurs variables indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$ *et soit d une autre variable irrationnelle avec les mêmes limites, on peut joindre cette grandeur d par une opération à sens unique au système des grandeurs en nombre infini:* $e_1, e_2, \ldots . e_\mu, \ldots .$»

La démonstration de (C') se fait de la manière la plus simple, en appliquant le développement de la fraction continue et en posant, comme dans § 2:

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots . \alpha_{\mu,\nu}, \ldots .)$$

pour $\mu = 1, 2, \ldots . \infty$

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots . \beta_\lambda, \ldots .)$$

et en établissant entre les nombres entiers positifs α et β le rapport:

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda,$$

où:

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}.$$

En effet la fonction $\mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}$, comme il est facile de le montrer, jouit de cette propriété remarquable de représenter tous

les nombres entiers positifs, et chacun d'eux une fois seulement, quand μ et ν y prennent également, indépendamment l'un de l'autre toutes les valeurs positives entières.

Le théorème (A') paraît indiquer le terme jusqu'à quel on peut généraliser le théorème (A) et les conséquences qui en découlent. Et maintenant que nous avons ainsi démontré, pour un champ extraordinairement riche et étendu *d'ensembles*, la propriété de pouvoir se joindre à sens complet et unique à une droite continue ou à une partie de cette droite (en entendant par *parties d'une ligne tous les ensembles de points qui y sont contenus*) la question se pose de savoir comment se comportent, *au point de vue de leur puissance,* les différentes parties d'une ligne droite continue c. a. d. les différents ensembles de points qu'on y peut imaginer en nombre infini.

Si nous dépouillons ce problème de sa forme géométrique et si, comme il a déjà été expliqué au § 3, nous entendons par *ensemble linéaire de nombres réels* tout ensemble imaginable de quantités réelles distinctes entre elles et en nombre infini, la question se pose ainsi: *en quelles classes se devisent les ensembles linéaires, et quel est le nombre de ces classes, si on groupe dans des classes différentes les ensembles de différente puissance, et dans la même les ensembles de même puissance?* Par un procédé d'induction, dans la description duquel nous n'entrerons pas davantage, on est amené à ce théorème, que le nombre des classes d'ensembles obtenus d'après ce mode de groupement est un nombre fini et qu'il est égal à *deux.*

D'après cela les ensembles linéaires comprendraient deux classes[1] dont la *première* contient tous les ensembles susceptibles d'être ramenés à la forme: *functio ipsius* ν (où ν parcourt tous les nombres entiers positifs); tandis que la *seconde* classe embrasse tous les ensembles reductibles à la forme: *functio ipsius* x (où x peut prendre toutes les valeurs réelles ≥ 0 et ≤ 1).

---

[1] Que ces deux classes soient distinctes en réalité, c'est la conséquence immédiate du théorème démontré dans le § 2 du travail cité plus haut (Journ. d. Math. pures et appliquées t. 77, p. 260), d'après lequel, si on a une série régulière infinie $u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$ on peut toujours trouver dans chaque intervalle donné $(\alpha \ldots . \beta)$ des nombres v qui ne se présentent pas dans la série proposée.

Il n'y aurait donc dans les ensembles linéaires infinies, et par conséquent aussi dans tous les autres qui s'y ramènent par une opération à sens complet et unique, que *deux espèces* de *puissances,* répondant à ces deux classes; nous remettons à plus tard la solution exacte de cette question.

Halle a. S. 11 Juillet 1877.

SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publ. d. l. Annales math. de Leipsic t. IV pag. 139).

Dans le 72[ième] tome du Journ. de M. BORCHARDT je démontre un théorème ayant pour objet le décroissement des coefficients de séries trigonométriques sous certaines conditions. Dans ce qui suit je voudrais en développer la démonstration d'une manière, qui ne laisse rien à désirer par rapport à la clarté et la simplicité. C'est du dernier des théorèmes proposés ici, qu'il est question, les autres me serviront comme préparatoires.

I. *Soit:*

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$$

une série infinie de quantités positives, soumises aux conditions:

$$x_2 \geqq kx_1,\ x_3 \geqq k^2x_2,\ \ldots,\ x_\nu \geqq k^{\nu-1}x_{\nu-1},\ \ldots$$

où k est une donnée positive plus grande que 1, il y a toujours des nombres réels Ω, qui ont un tel rapport avec la série donnée, que le produit $x_\nu\Omega$ diffère d'un nombre impair $2y_\nu + 1$ d'une quantité θ_ν, qui devient infiniment petite lorsque ν croît infiniment; et même la quantité Ω peut être prise dans un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ proposé d'avance à volonté.

Démonstration. Je désigne la grandeur de l'intervalle proposé $(\alpha \ldots \beta)$ par i et je suppose α et β positives toutes les deux, et on peut ramener

les autres cas à celui-là. Qu'on divise l'intervalle en trois parties égales; les points de division étant γ et δ, on a:

$$\alpha\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = \frac{i}{3}.$$

Soit x_n la première des quantités infiniment croissantes x_ν, qui est plus grande que les deux quantités données $\frac{3}{(k-1)i}$ et $\frac{6}{i}$.

Prenons d'abord le nombre impair $2y_n + 1$ tel, que la fraction $\frac{2y_n + 1}{x_n}$ tombe dans l'intervalle $\gamma\delta$; ce qui se peut, puisque $x_n > \frac{6}{i}$.

Puis déterminons les nombres impairs $2y_{n+1} + 1$, $2y_{n+2} + 1$, ... tels que:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &\left[2y_{n+1} + 1 - (2y_n + 1)\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] \leqq 1 \\ &\left[2y_{n+2} + 1 - (2y_{n+1} + 1)\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right] \leqq 1 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left[2y_\nu + 1 - (2y_{\nu-1} + 1)\frac{x_\nu}{x_{\nu-1}}\right] \leqq 1 \end{aligned}$$

A ces conditions je joins, pour faire disparaître toute ambiguité, la règle, qu'on prenne le plus petit toutes les fois qu'il y a deux nombres $2y_\nu + 1$, qui s'accommodent à la condition (A); on a alors une série complètement déterminée de nombres impairs $2y_\nu + 1$, pour $\nu \geqq n$; quant aux nombres $2y_\nu + 1$ pour $\nu < n$, nous pouvons les prendre à volonté.

Les nombres x_ν et y_ν déterminent maintenant une série infinie:

$$\text{(B)} \qquad \frac{2y_1 + 1}{x_1}, \ \frac{2y_2 + 1}{x_2}, \ \ldots \ \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}, \ \ldots$$

dont le terme général s'approche infiniment d'une limite, que je nomme Ω.

En effet d'après les conditions (A) on a:

$$\left[\frac{2y_{\nu+\mu} + 1}{x_{\nu+\mu}} - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right] \leqq \frac{1}{x_\nu} + \frac{1}{x_{\nu+1}} + \ldots$$

et puisque la somme à droite devient infiniment petite en faisant croitre ν, la même chose a lieu par rapport à la différence $\frac{2y_{\nu+\mu} + 1}{x_{\nu+\mu}} - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$

dans laquelle le nombre μ peut être pris à volonté. Mais on sait que cette condition étant remplie, la limite $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$ existe toujours. C'est cette limite que nous nommons Ω.

Des conditions (A) pour $\nu \geqq n$ on tire pour Ω la relation:

$$\left[\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right] \leqq \frac{1}{x_{\nu+1}} + \frac{1}{x_{\nu+2}} + \ldots .$$

où:

$$[\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] \leqq \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} + \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} \cdot \frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu+2}} + \ldots$$

Mais on a:

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} = \frac{1}{k^\nu}, \quad \frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu+2}} = \frac{1}{k^{\nu+1}}, \ldots .$$

On a donc aussi:

$$[\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] \leqq \frac{1}{k^\nu} + \frac{1}{k^{2\nu+1}} + \frac{1}{k^{3\nu+3}} + \ldots .$$

et à plus forte raison:

$$\text{(C)} \qquad [\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] < \frac{1}{k^\nu - 1};$$

k étant > 1 on voit par là que la différence:

$$\theta_\nu = x_\nu \Omega - (2y_\nu + 1)$$

a pour limite zéro pour $\nu = \infty$. Donc la première partie de notre théorème est démontrée.

Il reste à faire voir, que le nombre trouvé Ω se trouve dans l'intervalle donné $(\alpha \ldots . \beta)$; cela résulte aussi de (C), en y faisant $\nu = n$; on a alors:

$$\left[\Omega - \frac{2y_n + 1}{x_n}\right] < \frac{1}{x_n(k^n - 1)}$$

et à plus forte raison

$$\left[\Omega - \frac{2y_n + 1}{x_n}\right] < \frac{1}{x_n(k - 1)}.$$

Mais nous avions pris x_n tel que $\frac{1}{x_n(k-1)} < \frac{i}{3}$; on a donc aussi:

$$\left| \Omega - \frac{2y_n + 1}{x_n} \right| < \frac{i}{3}$$

La fraction $\frac{2y_n + 1}{x_n}$ étant située dans l'intervalle $\gamma\delta$, la dernière relation montre que Ω est situé dans l'intervalle $(\alpha \ldots . \beta)$.

II. *Une série de nombres réels:*

$$c_1, c_2, \ldots . c_\nu, \ldots .$$

étant telle, que de chaque série y contenue:

$$c_{n_1}, c_{n_2}, \ldots . c_{n_\nu}, \ldots .$$

l'on peut toujours enlever une troisième:

$$c_{n_{m_1}}, c_{n_{m_2}}, \ldots . c_{n_{m_\nu}}, \ldots .,$$

dont le terme général $c_{n_{m_\nu}}$ *devient infiniment petit pour* $\nu = \infty$, *on a toujours:*

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0$$

Démonstration. En considérant une quantité positive ε quelconque, je dis que le nombre des termes c_ν, qui sont plus grands que ε, par rapport à leur valeur absolue, doit être *fini*; car s'il était infini il y aurait une série infinie c_{n_ν}, contenue dans la première c_ν, dont tous les termes seraient plus grands que ε; on ne pourrait donc pas en enlever une troisième $c_{n_{m_\nu}}$, dont les termes deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$, ce qui est contre l'hypothèse.

Il est donc clair que le nombre des termes c_ν, qui sont plus grands qu'une quantité ε, si petite qu'elle soit, est *fini*; mais de là on conclut évidemment que $\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0$.

III. *Lorsque pour chaque valeur de x entre zéro et* $\frac{i}{2}$ *(i étant une quantité donnée positive) on a:*

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin \nu x = 0,$$

on a toujours aussi:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

Démonstration. Soit c_{n_ν} une série quelconque contenue dans la série c_ν; je ferai voir, qu'il y en a toujours une troisième $c_{n_{m_\nu}}$, contenue dans c_{n_ν} et telle, que l'on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} = 0$$

Pour cela j'enlève de la série c_{n_ν} donnée l'autre $c_{n_{m_\nu}}$ à condition, que, le nombre k étant donné et > 1, on ait pour chaque valeur de ν:

$$n_{m_\nu} \geqq k^{\nu-1} n_{m_{\nu-1}}.$$

Il est clair, que cela se peut de diverses manières; prenons-en une déterminée. La série d'indices n_{m_ν} étant prise de sorte qu'on détermine d'après I une quantité Ω, située dans l'intervalle $\left(0 \ldots . \frac{i}{\pi}\right)$, et telle, que l'on ait:

$$\Omega n_{m_\nu} - (2y_\nu + 1) = \theta_\nu$$

où y_ν est entier et θ_ν devient infiniment petite pour $\nu = \infty$.

Alors la quantité $\Omega' = \Omega \frac{\pi}{2}$ est située dans l'intervalle $\left(0 \ldots . \frac{i}{2}\right)$ et l'on a:

$$\Omega' n_{m_\nu} - \frac{\pi}{2}(2y_\nu + 1) = \frac{\pi}{2}\theta_\nu.$$

D'après l'hypothèse, faite dans notre théorème, en l'appuyant sur le nombre $x = \Omega'$, on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin(\nu\Omega') = 0$$

De là on peut conclure, qu'aussi:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} . \sin(n_{m_\nu}\Omega') = 0.$$

Mais on a: $\sin(n_{m_\nu}\Omega') = \pm \cos\frac{\pi}{2}\theta_\nu$, d'où l'on voit que:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} . \cos\left(\frac{\pi}{2}\theta_\nu\right) = 0.$$

θ_ν étant une quantité qui disparait pour $\nu = \infty$, on conclut que:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} = 0.$$

Il y a donc dans chaque série c_{n_ν}, contenue dans la première c_ν, une troisième série $c_{n_{m_\nu}}$, contenue dans la seconde, telle que ses termes deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$. D'après le théorème II, on a donc de même:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

IV. *Lorsque pour chaque valeur de x comprise dans un intervalle donné $(\alpha \ldots \beta)$, la condition:*

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x) = 0$$

est remplie, on a toujours:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0, \qquad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = 0.$$

Démonstration. Soit

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ et } [\beta - \alpha] = i$$

Posons:

$$a_\nu \cos \nu\gamma - b_\nu \sin \nu\gamma = c_\nu$$

$$a_\nu \sin \nu\gamma + b_\nu \cos \nu\gamma = d_\nu$$

On a:

$$a_\nu = c_\nu \cos \nu\gamma + d_\nu \sin \nu\gamma$$

$$b_\nu = - c_\nu \sin \nu\gamma + d_\nu \cos \nu\gamma;$$

d_ν devient infiniment petit pour $\nu = \infty$, par hypothèse, puisque d_ν est ce que devient l'expression $a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x$ pour $x = \gamma$, et que γ est une valeur située entre α et β.

De même c_ν devient aussi infiniment petit pour $\nu = \infty$; car on a, par hypothèse, pour chaque valeur de x positive et $< \frac{i}{2}$:

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu(\gamma + x) + b_\nu \cos \nu(\gamma + x)) = 0$$

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu(\gamma - x) + b_\nu \cos \nu(\gamma - x)) = 0.$$

Par soustraction on en conclut:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin \nu x = 0$$

pour chaque valeur positive de $x < \frac{i}{2}$.

De là on voit d'après le théorème III, que l'on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

Maintenant c_ν et d_ν devenant toutes les deux infiniment petites, il en résulte la même propriété pour a_ν et b_ν.

Berlin, 21 Avril 1871.

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR

G. CANTOR

À HALLE a. S.

(Traduction d'un mém. publ. d. l. Annales math. de Leipsic t. V. p. 123.)

Je voudrais faire connaître dans ce travail une extension du théorème d'après lequel une fonction ne peut être développée que d'une seule manière en série trigonométrique.

J'ai cherché à démontrer dans le Journal de Crelle t. 72, p. 139, que deux séries trigonométriques:

$$\frac{1}{2} b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

et

$$\frac{1}{2} b'_0 + \sum (a'_n \sin nx + b'_n \cos nx)$$

qui, pour toutes les valeurs de x, convergent et ont la même somme, ont les mêmes coefficients; j'ai ensuite montré, dans une notice relative à ce travail, que ce théorème reste vrai, si, pour un nombre fini de valeurs de x, on renonce soit à la convergence, soit à l'égalité des sommes des deux séries.

L'extension que j'ai en vue ici consiste en ce que pour un nombre infini de valeurs de x dans l'intervalle $[0 \ldots\ldots (2\pi)]$ on peut renoncer

à la convergence ou à l'accord des sommes de séries, sans que le théorème cesse d'être vrai.

Mais dans ce but je suis obligé de commencer par des explications, ou plutôt par quelques simples indications destinées à mettre en lumière les diverses manières dont peuvent se comporter des grandeurs numériques en nombre fini ou infini; je suis amené par là à donner quelques définitions, afin de rendre aussi courte que possible l'exposition du théorème en question, dont la démonstration se trouve au § 3.

§ 1.

Les nombres rationnels servent de fondement pour arriver à la notion plus étendue d'une grandeur numérique; je les désignerai sous le nom de système A, en y comprenant zéro.

On rencontre une première généralisation de la notion de grandeur numérique dans le cas où l'on a, obtenue par une loi, une série infinie de nombres rationnels:

(1) $$a_1, \; a_2, \; \ldots\ldots \; a_n, \; \ldots\ldots,$$

constituée de telle sorte que la différence $a_{n+m} - a_n$ devient infiniment petite à mesure que n croît, quel que soit le nombre entier positif m, ou, en d'autres termes, qu'avec ε (positif rationnel) pris arbitrairement on a un nombre entier n_1 tel que $(a_{n+m} - a_n) < \varepsilon$, si $n \gtreqless n_1$, et si m est un nombre entier positif pris à volonté.

J'exprime ainsi cette propriété de la série (1): »La série (1) a une limite déterminée b».

Ces mots ne servent donc qu'à énoncer cette propriété de la série, sans exprimer d'abord autre chose, et de même que nous lions la série (1) avec un signe particulier b, de même on doit aussi attacher différents signes b, b', b'' à diverses séries de même espèce.

Soit une seconde série:

(1') $$a'_1, \; a'_2, \; \ldots\ldots \; a'_n, \; \ldots\ldots$$

ayant une limite déterminée b', on trouve que les deux séries (1) et (1′) ont constamment une des trois relations suivantes, qui s'excluent l'une l'autre: Ou bien: 1° $a_n - a'_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, ou bien: 2° $a_n - a'_n$, à partir d'un certain n, reste toujours plus grand qu'une grandeur positive (rationnelle) ε, ou enfin 3° $a_n - a'_n$, à partir d'un certain n reste toujours plus petit qu'une grandeur négative (rationnelle) $-\varepsilon$.

Dans le cas de la première relation, je pose: $b = b'$, dans le cas de la seconde: $b > b'$, et, dans le cas de la troisième: $b < b'$.

On trouve de même qu'une série (1), ayant une limite b, n'a avec un nombre rationnel a qu'une des trois relations suivantes. Ou bien:

1° $a_n - a$ devient infiniment petit à mesure que n augmente, ou bien: 2° $a_n - a$, à partir d'un certain n, reste toujours plus grand qu'une grandeur positive (rationnelle) ε, ou enfin 3° $a_n - a$, à partir d'un certain n, reste toujours plus petit qu'une grandeur négative (rationnelle) $-\varepsilon$.

Pour exprimer l'existence de ces rapports, nous écrivons resp.:

$$b = a, \quad b > a, \quad b < a.$$

De ces définitions et de celles qui suivent immédiatement, il résulte (et on peut démontrer rigoureusement cette conséquence) que, b étant la limite de la série (1), $b - a_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, ce qui justifie par conséquent d'une manière précise la désignation de »limite de la série (1)» donnée à b.

Qu'on désigne par B l'ensemble des grandeurs numériques b.

D'après les conventions précédentes, on peut étendre les opérations élémentaires entreprises avec des nombres rationnels aux deux systèmes A et B réunis.

Soient en effet b, b', b'' trois grandeurs numériques du système B, les formules:

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''$$

servent à exprimer qu'entre les séries correspondantes aux trois nombres b, b', b'':

$$a_1, \; a_2, \; \ldots\ldots$$

$$a'_1, \; a'_2, \; \ldots\ldots$$

$$a''_1, \; a''_2, \; \ldots\ldots$$

se vérifient resp. les relations:

$$\lim\,(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0,$$

$$\lim\,(a_n a'_n - a''_n) = 0,$$

$$\lim\,\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0,$$

où je n'ai plus besoin, d'après ce qui précède, d'expliquer plus longuement le sens du signe-lim. On a des définitions semblables pour les cas où un ou deux des trois nombres appartiennent au système A.

En général toute équation obtenue par un nombre fini d'opérations élémentaires

$$F(b,\ b',\ \ldots\ldots\ b^{(\rho)}) = 0$$

se présentera comme expression d'une relation déterminée entre les séries qui donnent naissance aux grandeurs numériques b, b', b'', ... $b^{(\rho)}$.(1)

Le système A a donné naissance au système B; de même les deux systèmes B et A réunis, donneront naissance, par le même procédé, à un nouveau système C.

Soit en effet une série infinie:

(2) $$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots\ b_n,\ \ldots\ldots$$

de nombres choisis dans les systèmes A et B et n'appartenant pas tous au système A, et cette série étant constituée de telle sorte que $b_{n+m} - b_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, quel que soit d'ailleurs m (et cette condition, d'après les définitions précédentes, peut se concevoir comme quelque chose de parfaitement déterminé) je dirai que cette série a une limite déterminée c.

Les grandeurs numériques c constituent le système C.

Les définitions de l'équivalence, de l'inégalité en plus ou en moins, et celles des opérations élémentaires soit entre les grandeurs c, soit entre

---

(1) Quand on dit, par exemple, qu'une équation de $\mu^{\text{ème}}$ degré à coefficients entiers: $f(x) = 0$, a une racine réelle ω, cela signifie qu'on a une série: a_1, a_2, ... a_n, ... de la même nature que la série (1) ayant pour limite le signe ω, et jouissant en outre de la propriété:

$$\lim f(a_n) = 0.$$

ces grandeurs elles-mêmes et celles des systèmes B et A, sont analogues aux définitions données plus haut.

Tandis que les systèmes B et A sont tels qu'on peut égaler chacun des a à un b, mais non pas chacun des b à un a, on peut au contraire égaler non seulement chacun des b à un c, mais aussi chacun des c à un b.

Bien que par là les systèmes B et C puissent dans une certaine mesure être regardés comme identiques il est essentiel, dans la théorie que j'expose ici (et d'après laquelle la grandeur numérique, n'ayant d'abord en elle-même, en général, aucun objet, ne paraît que comme élément de théorèmes qui ont une certaine objectivité, de ce théorème, p. ex., que la grandeur numérique sert de limite à la série correspondante) il est essentiel, dis-je, de maintenir la distinction abstraite entre les deux systèmes B et C; aussi bien l'équivalence de deux grandeurs numériques b, b' empruntées au système B n'entraîne pas leur identité, mais exprime seulement une relation déterminée entre les séries auxquelles elles se rapportent.

Le système C et ceux qui le précèdent produisent d'une manière analogue un système D, ceux-ci à leur tour, un autre système E, et ainsi de suite; par λ de ces opérations (en considérant l'opération par laquelle on a passé de A à B comme la première) on arrive à un système L de grandeurs numériques.

Si on se rappelle la suite des définitions données pour l'équivalence et l'inégalité en plus ou en moins de ces différentes grandeurs numériques et pour les opérations élémentaires qui permettent de passer d'un système à l'autre, le même rapport aura lieu avec ceux qui précèdent, à l'exception de A, en sorte qu'on pourra toujours égaler une grandeur numérique l à une grandeur numérique k, i, ... c, b, et réciproquement.

On peut ramener à la forme d'égalités de ce genre les résultats de l'analyse (abstraction faite de quelques cas connus) bien que (je ne l'indique ici qu'en égard à ces exceptions) la notion de nombre, si développée qu'elle soit ici, porte en soi le principe d'une extension nécessaire en elle-même et absolument infinie.

Il semble légitime, étant donnée une grandeur numérique, dans le système L, de se servir de cette expression: C'est une grandeur numérique, une valeur, ou une limite, de $\lambda^{\text{ème}}$ espèce; d'où l'on voit que j'emploie en général les mots grandeur numérique, valeur et limite dans le même sens.

Une équation $F(l, l', \ldots\ldots l^{(p)}) = 0$ formée de nombres $l, l', \ldots\ldots l^{(p)}$ au moyen d'un nombre fini d'opérations élémentaires apparaît précisément, dans la théorie en question, comme l'expression d'un rapport déterminé entre $p + 1$ séries λ fois infinies de nombres rationnels; ces séries sont produites par les séries simplement infinies qui définissent tout d'abord les grandeurs $l, l', \ldots\ldots l^{(p)}$; on les obtient en remplaçant, dans les premières, les éléments par les séries qui les définissent, en traitant de même les séries ainsi obtenues, qui en général seront doublement infinies, et en continuant ce procédé jusqu'à ce qu'on n'ait plus devant soi que des nombres rationnels.

Dans une autre circonstance je reviendrai avec plus de détail sur tous ces rapports. Ce n'est pas non plus ici le lieu d'expliquer comment les conventions et les opérations dont j'ai parlé dans ce § peuvent servir à l'analyse infinitésimale. Dans ce qui suit, en exposant le rapport des grandeurs numériques avec la géométrie de la ligne droite, je me bornerai presque exclusivement aux théorèmes nécessaires, d'où l'on peut, si je ne me trompe, déduire le reste au moyen d'une démonstration purement logique. J'indique pour le comparer aux § 1 et § 2, le 10e livre des Eléments d'Euclide; qui peut servir de point de comparaison en cette matière.

§ 2.

Les points d'une ligne droite sont déterminés quand, en prenant pour base une unité de mesure, on indique leurs distances, abscisses, d'un point fixe 0 de la ligne droite par le signe + ou —, suivant que le point en question se trouve dans la partie (fixée d'avance) positive ou négative de la ligne à partir de 0.

Si cette distance a avec l'unité de mesure un rapport rationnel, elle est exprimée par une grandeur numérique du système A; dans l'autre cas, si le point est connu par une construction, on peut toujours imaginer une série:

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_n,\ \ldots\ldots$$

réalisant les conditions énoncées dans le § 1, et ayant avec la distance en question une relation telle que les points de la droite, auxquels se rapportent les distances a_1, a_2, ... a_n, ..., se rapprochent à l'infini du point à déterminer, à mesure que n augmente.

Ce que nous exprimons, en disant: La distance du point à déterminer au point 0 est égale à b, quand b est la grandeur numérique correspondant à la série (1).

On démontre ensuite que les conditions d'équivalence et d'inégalité en plus ou en moins de distances connues concorde avec les conditions d'équivalence et d'inégalité en plus ou en moins (définies dans le § 1), des grandeurs numériques correspondantes, qui représentent ces distances.

Il suit maintenant sans difficulté que les grandeurs numériques des systèmes C, D ..... sont aussi capables de déterminer des distances connues. Mais pour achever de faire reporter le lien que nous observons entre les systèmes des grandeurs numériques définies dans le § 1 et la géométrie de la ligne droite, il faut ajouter encore un axiôme dont voici le simple énoncé: A chaque grandeur numérique appartient aussi, réciproquement, un point déterminé de la droite, dont la coordonnée est égale à cette grandeur numérique dans le sens exposé dans ce §. (1)

J'appelle ce théorème un axiôme, par ce qu'il est dans sa nature de ne pouvoir être démontré d'une façon générale.

Ce théorème sert aussi à donner supplémentairement aux grandeurs numériques une certaine objectivité, dont elles sont, toutefois, complètement indépendantes.

D'après ce qui précède, je considère un point de la droite comme déterminé, quand sa distance de 0, précédée du signe convenable, est donnée comme grandeur numérique, valeur ou limite de $\lambda^{\text{ème}}$ espèce.

---

(1) A chaque grandeur numérique appartient un point déterminé, mais à chaque point se rapportent, comme coordonnées, dans le sens ci-dessus, une quantité innombrable de grandeurs numériques égales; car, comme on l'a déjà fait entendre plus haut, il suit, de fondements purement logiques, que des points distincts ne peuvent pas répondre à des grandeurs numériques égales, et qu'un seul et même point ne peut se rapporter à des grandeurs numériques inégales, comme coordonnées.

Entrons maintenant plus pleinement dans notre sujet et considérons les relations qui se présentent, étant données des grandeurs numériques en nombre fini ou infini.

D'après ce qui précède on peut considérer les différentes grandeurs numériques comme correspondant une à une avec les différents points d'une ligne droite. Pour plus de clarté, et sans que cela soit essentiel, nous nous servirons, dans la suite, de ce mode de représentation, et, quand nous parlerons de points, nous aurons toujours en vue les valeurs par lesquelles on les obtient.

Pour plus de brièveté, j'appelle système de valeurs un nombre donné, fini ou infini, de grandeurs numériques, et système de points un nombre donné, fini ou infini, de points d'une droite. Ce qui sera dit dans la suite des systèmes de points, peut s'appliquer immédiatement, d'après ce qui a été dit, aux systèmes de valeurs.

Etant donné, dans un intervalle fini, un système de points, il y a lieu, en général, d'envisager un second système de points déduit du premier d'une certaine manière, puis un troisième déduit du deuxième de la même façon, etc.; il est nécessaire de les étudier tous si l'on veut concevoir la nature du premier.

Pour définir ces nouveaux systèmes de points, définissons d'abord la notion du: point-limite d'un système de points.

Par point-limite d'un système de points P, j'entends un point de la droite tel que dans son voisinage, il y ait un nombre infini de points du système P; il peut d'ailleurs se faire que le point-limite appartienne à ce système. Et j'appelle voisinage d'un point tout intervalle dans lequel ce point est contenu. D'après cela il est facile de démontrer qu'un système composé d'un nombre infini de points a toujours pour le moins un point-limite. Nous appelons point *isolé* de P tout point qui, appartenant à P, n'est pas en même temps point-limite de P.

C'est dès lors la condition déterminée de tout point de la droite par rapport à un système donné P, d'être ou de ne pas être un point-limite de ce système et on a, aussi défini en même temps que le système P, le système de ses points-limites, que je désigne par P' et que j'appelle le premier système dérivé de P.

Si le système P' n'est pas composé d'un nombre fini de points, on peut en déduire par le même procédé un autre système P'', que j'appelle

le second système dérivé de P. Par ν opérations analogues on arrive à la notion du $\nu^{\text{ème}}$ système $P^{(\nu)}$ dérivé de P.

Si par exemple le système P est composé de tous les points de la droite dont les abscisses sont rationnelles et comprises entre 0 et 1 (qu'on y comprenne, ou non, les limites), le système dérivé P' se composera de tous les points de l'intervalle (0 ..... 1), y compris les limites 0 et 1. Les systèmes suivantes P'', P''', ... ne diffèrent pas de P'. Ou bien, si la quantité P est composée des points dont les abscisses sont respect. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{1}{n}, \ldots\ldots$, le système P' se composera du seul point 0 et ne donnera naissance lui-même, par déduction, à aucun autre.

Il peut arriver, et c'est le cas qui nous intéresse seul ici, qu'après ν opérations le système $P^{(\nu)}$ se compose d'un nombre fini de points et par conséquent ne donne lui-même naissance, par déduction, à aucun autre système; dans ce cas nous appellerons le système primitif P de la $\nu^{\text{ème}}$ espèce; et il suit de là que P', P'', ... sont alors de la $\overline{\nu - 1}^{\text{ème}}$, de la $\overline{\nu - 2}^{\text{ème}}$ ..... espèce.

Dans cette théorie, l'ensemble de tous les systèmes d'espèce déterminée est donc considéré comme un genre particulier dans l'ensemble de tous les systèmes de points imaginables, et les systèmes de points que nous avons appelés de $\nu^{\text{ème}}$ espèce forment une espèce particulière dans ce genre.

Un seul point offre déjà un exemple d'un système de points de $\nu^{\text{ème}}$ espèce, si on donne son abscisse comme grandeur numérique de $\nu^{\text{ème}}$ espèce, satisfaisant à certaines conditions faciles à établir. Si en effet on décompose alors cette grandeur numérique pour obtenir les termes (de $\overline{\nu - 1}^{\text{ème}}$ espèce) de la série qui lui correspond, si on décompose ces membres eux-mêmes pour arriver aux termes (de $\overline{\nu - 2}^{\text{ème}}$ espèce) qui les constituent, et ainsi de suite, on finit par obtenir un nombre infini de nombres rationnels; et, si on se représente le système de points correspondant à ces nombres, elle sera de $\nu^{\text{ème}}$ espèce. [1]

---

[1] Je le relève expressement, que ce n'est pas toujours le cas. En général le système de points ainsi engendrée par une grandeur numérique de $\nu^{\text{ème}}$ espèce peut être d'une espèce inférieure ou supérieure à la $\nu^{\text{ème}}$ espèce ou même n'être d'aucune espèce déterminée.

§ 3.

Théorème. Si une équation ayant la forme:

(1) $$0 = C_0 + C_1 + \ldots\ldots + C_n + \ldots\ldots$$

où $C_0 = \frac{1}{2}d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, est satisfaite pour toutes les valeurs de x, à l'exception de celles qui correspondent aux points d'un système de points P de $\nu^{\text{ème}}$ espèce donnée dans l'intervalle $[0 \ldots\ldots (2\pi)]$, où ν désigne un nombre entier aussi grand que l'on veut, je dis qu'on aura:

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0.$$

Démonstration. Dans cette démonstration, comme la suite le fera voir, en parlant de P on a en vue non-seulement le système donnée de $\nu^{\text{ème}}$ espèce des points exceptionnels dans l'intervalle $[0 \ldots\ldots (2\pi)]$, mais encore le système produit sur la ligne entière infinie par la répétition périodique.

Considérons maintenant la fonction:

$$F(x) = C_0\frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \ldots\ldots - \frac{C_n}{nn} - \ldots\ldots$$

Il résulte de la nature d'un système P de $\nu^{\text{ème}}$ espèce qu'il doit y avoir un intervalle $(\alpha \ldots\ldots \beta)$, où ne se trouve aucun point de ce système; pour toutes les valeurs de x comprises dans cet intervalle on aura donc, à cause de la convergence de notre série (1) que nous avons supposée:

$$\lim\ (c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

par conséquent, d'après un théorème connu (v. 4e vol. de Annales math. p. 139):

$$\lim\ c_n = 0, \quad \lim\ d_n = 0.$$

La fonction F jouit donc des propriétés suivantes (v. Riemann, Sur le moyen de représenter une fonction par une série trigonométrique, § 8):

1° Elle reste continue pour toutes ces valeurs de x.

2° $\lim \dfrac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, si $\lim \alpha = 0$, pour toutes les valeurs de x, excepté celles qui correspondent aux points du système P.

3° On a: $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha} = 0$, si $\lim \alpha = 0$, pour toutes les valeurs de x sans exception.

Je vais montrer maintenant que $F(x) = cx + c'$. Pour cela je considère d'abord un intervalle quelconque $(p \ldots\ldots q)$ où il n'y a qu'un nombre fini de points du système P; soient $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$ ces points écrits d'après leur ordre de succession.

Je dis que $F(x)$ est linéaire dans l'intervalle $(p \ldots\ldots q)$; car $F(x)$, à cause des propriétés 1° et 2°, est fonction linéaire dans chacun des intervalles obtenus en divisant $(p \ldots\ldots q)$ par les points $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$; comme en effet il n'y a de points exceptionnels dans aucun de ces intervalles, les conclusions appliquées dans le mémoire (v. Journal de Borchardt, t. 72, p. 159) ont ici toute leur force; il ne reste donc à démontrer que l'identité de ces fonctions linéaires.

Je vais le faire pour deux fonctions voisines et je les choisis dans les deux intervalles $(x_0 \ldots\ldots x_1)$ et $(x_1 \ldots\ldots x_2)$.

Soit dans $(x_0 \ldots\ldots x_1)$ $\quad F(x) = kx + l$
et dans $(x_1 \ldots\ldots x_2)$ $\quad F(x) = k'x + l'$.

A cause de 1° on a $F(x_1) = kx_1 + l$; puis, pour des valeurs assez petites de α:

$$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + l';$$

$$F(x_1 - \alpha) = k(x_1 - \alpha) + l.$$

On a ainsi, à cause de 3°:

$$\lim \frac{(k'-k)x_1 + l' - l + \alpha(k'-k)}{\alpha} = 0,$$

pour $\lim \alpha = 0$, ce qui n'est possible que si:

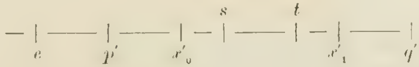
$$k = k', \quad l = l'.$$

En résumé nous pouvons énoncer le résultat suivant:

A) »Soit $(p \ldots\ldots q)$ un intervalle quelconque, où il n'y a qu'un nombre fini de points du système P, $F(x)$ sera linéaire dans cet intervalle.»

Je considère ensuite un intervalle quelconque $(p' \ldots\ldots q')$ qui ne contient qu'un nombre fini de points $x'_0, x'_1, \ldots\ldots x'_n$ du premier sys-

tème dérivé P'; — et je dis d'abord que dans chacun des intervalles partiels obtenus en divisant $(p \,.....\, q)$ par les points $x'_0, x'_1, ...$, p. ex. dans $(x'_0 \,.....\, x'_1)$, la fonction $F(x)$ est linéaire



Car chacun de ces intervalles partiels contient il est vrai en général un nombre infini de points de P, en sorte que le résultat A) ne peut s'y appliquer immédiatement; mais chaque intervalle $(s \,.....\, t)$ compris dans les limites de $(x'_0 \,.....\, x'_1)$ ne renferme qu'un nombre fini de points de P (parce qu'autrement il y aurait encore entre x'_0 et x'_1 d'autres points du système P') et par suite la fonction est linéaire dans $(s \,.....\, t)$ à cause de A). Mais comme on peut rapprocher à volonté les points extrèmes s et t des points x'_0 et x'_1, on conclut, sans façon que la fonction continue $F(x)$ est aussi linéaire dans $(x'_0 \,.....\, x'_1)$.

Après l'avoir démontré pour chacun des intervalles partiels de $(p' \,.....\, q')$, on obtient le résultat suivant par les mêmes raisonnements que ceux qui ont conduit au résultat A):

A') Soit $(p' \,.....\, q')$ un intervalle quelconque ne renfermant qu'un nombre fini de points du système P', $F(x)$ est linéaire dans cet intervalle.

La démonstration se poursuit de la même façon. Car, étant une fois établi que $F(x)$ est fonction linéaire dans un intervalle quelconque $(p^{(k)} \,.....\, q^{(k)})$, qui ne contient qu'un nombre fini de points du $k^{\text{ème}}$ système $P^{(k)}$ dérivé de P, il résulte, comme dans le passage de A) à A'), que $F(x)$ est aussi fonction linéaire dans un intervalle quelconque $(p^{(k+1)} \,.....\, q^{(k+1)})$ qui ne renferme qu'un nombre fini de points du $(k+1)^{\text{ème}}$ système $P^{(k+1)}$.

Nous concluons ainsi, par un nombre fini de déductions successives, que $F(x)$ est linéaire dans tout intervalle qui ne contient qu'un nombre fini de points du système $P^{(\nu)}$. Mais le système P étant de $\nu^{\text{ème}}$ espèce, comme on l'a supposé, un intervalle $(a \,.....\, b)$ pris à volonté dans la droite ne renfermera qu'un nombre fini de points de $P^{(\nu)}$. $F(x)$ est donc linéaire dans tout intervalle $(a \,.....\, b)$ pris à volonté, et il suit de là, comme il est facile de le voir, que $F(x)$ prend la forme: $F(x) = cx + c'$ pour toutes les valeurs de x. Ce point étant mis en évidence, la démonstration se

poursuit comme dans le travail déjà cité deux fois, à partir du moment où la forme linéaire est établie.

On peut aussi énoncer le théorème que nous avons démontré ici de la manière suivante:

»Une fonction discontinue $f(x)$, distincte de zéro ou indéterminée pour toutes les valeurs de x correspondant aux points d'un système de points P de $\nu^{\text{ème}}$ espèce donné dans l'intervalle $[0 \ldots\ldots (2\pi)]$, mais égale à 0 pour toutes les autres valeurs de x, ne peut pas être représentée par une série trigonométrique.»

Halle, le 8 nov. 1871.

SUR LES ENSEMBLES INFINIS ET LINÉAIRES DE POINTS

PAR

G. CANTOR
À HALLE a. S.

I.

(Extrait des Annales mathématiques de Leipsic, vol. 15.)

Dans un mémoire publié dans le Journal de M. Borchardt, t. 84 j'ai démontré pour une classe très-étendue d'ensembles géométriques et arithmétiques, soit continus, soit discontinus, qu'on peut les faire correspondre sans ambiguité à des points distribués d'une façon continue ou discontinue sur un segment de droite. Ces derniers ensembles acquièrent par là une importance particulière; nous les appellerons *ensembles* ou *systèmes linéaires* de points. Les points d'un tel système sont distribués sur un segment de droite de longueur finie ou infinie ou bien de façon à occuper tout le segment ou bien de façon à n'occuper que des parties de ce segment, et il ne paraît pas hors de propos de les étudier et de chercher à les classer; c'est ce que nous nous proposons de faire ici. En partant de divers points de vue et des principes de classification, qui s'y rattachent, nous sommes amenés à partager les ensembles de points linéaires en certaines catégories. Pour commencer par un de ces points de vue, rappelons-nous la notion de l'ensemble dérivé d'un ensemble de points donné P, telle qu'elle a été donnée dans un travail sur les séries trigono-

métriques (Annales math. t. 5); dans un ouvrage récemment paru de M. U. Dini (Fondamenti per la teorica d. funz. d. variabili reali, Pisa, 1878) nous voyons cette notion encore plus développée, puisqu'elle sert de point de départ à une série de généralisations remarquables de théorèmes analytiques connus.[1]

D'ailleurs cette notion de *l'ensemble dérivé* d'un ensemble donné n'est pas restreinte aux ensembles linéaires, mais elle s'applique de la même manière aux ensembles à deux, trois ou n dimensions continus ou discontinus. Comme nous le montrerons plus tard, c'est sur cette notion que repose la conception la plus claire et en même temps la plus générale d'un *ensemble continu.*

Le *dérivé* $P^{(1)}$ *d'un ensemble de points* P est en effet l'ensemble de tous les points qui jouissent de la propriété de coïncider avec un point-limite de P, peu importe d'ailleurs que ce point-limite soit en même temps un point de P, ou non.

Comme alors le *dérivé* d'un ensemble P est un nouveau ensemble déterminé $P^{(1)}$, on peut aussi chercher le *dérivé* de $P^{(1)}$, qui s'appellera le *deuxième ensemble dérivé* ou simplement le *deuxième dérivé* de P; et en continuant ainsi, on obtient le $\nu^{\text{ème}}$ *dérivé* de P, que l'on désigne par $P^{(\nu)}$.

Il peut se faire que la suite des dérivés $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots\ldots$ conduise à un dérivé $P^{(n)}$ composé de points qui ne se présentent qu'en nombre fini dans chaque étendue finie, en sorte que $P^{(n)}$ n'a pas de points-limites et par conséquent ne donne lieu à aucun dérivé; dans ce cas nous disons que le système de points P est du premier genre et de la $n^{\text{ème}}$ espèce. Mais si la série des dérivés de P, la série $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots\ldots$ est infinie, nous disons que l'ensemble de points P est du deuxième genre. De là on reconnaît sans peine que si P est du premier genre et de la $n^{\text{ème}}$ espèce, $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots\ldots$ appartiennent aussi au premier genre et sont respectivement de la $\overline{n-1}^{\text{ème}}$, de la $\overline{n-2}^{\text{ème}}$, de la $\overline{n-3}^{\text{ème}}$ espèce; qu'ensuite si P est du deuxième genre, la même conséquence s'applique à tous les dérivés $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots\ldots$ Il est aussi à remarquer que tous les points de $P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots\ldots$ sont toujours aussi des points du premier dérivé

(1) Voir aussi: Ascoli. Nouve richerche sulla serie di Fourier. Reale Academia dei Lincei (1877—78).

$P^{(1)}$, tandis qu'un point appartenant à $P^{(1)}$ n'est pas nécessairement un point de P.

On découvre ensuite des caractères importants d'un ensemble de points P, si l'on étudie la manière dont se comporte cet ensemble par rapport à un intervalle donné continu $(\alpha \ldots \beta)$, dont les points extrêmes sont considérés comme appartenant à l'intervalle même. Il peut se faire que quelques points ou même que tous les points de cet intervalle soient en même temps des points de P, ou bien qu'aucun point de $(\alpha \ldots \beta)$ n'appartienne à P; dans ce dernier cas nous disons que P est tout entier en dehors de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$.

Si P est contenu dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, en tout ou en partie, il peut se présenter un cas remarquable: c'est le cas où chaque intervalle $(\gamma \ldots \delta)$, si petit qu'il soit, compris dans $(\alpha \ldots \beta)$, contient des points de P. Dans ce cas nous dirons que P est *condensé dans tout l'intervalle* $(\alpha \ldots \beta)$.

Comme exemples de systèmes de points ainsi condensés dans toute l'étendue de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, nous avons: 1° tout ensemble de points auquel appartiennent comme éléments tous les points de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$; 2° l'ensemble de points composé de tous les points dont les abscisses sont des nombres rationnels; 3° le système de points composé de tous les points, qui ont pour abscisses les nombres rationnels de la forme $\pm \frac{2n+1}{2^m}$, où n et m sont des nombres entiers positifs.

De cette explication de l'expression »*condensé dans toute l'étendue d'un intervalle donné*», il résulte que, si un système de points n'est pas condensé dans tout un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, il doit nécessairement exister un intervalle $(\gamma \ldots \delta)$ compris dans le premier et où ne se trouve aucun point de P. On peut montrer aussi que, si P est condensé dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ non seulement la même chose est vrai pour $P^{(1)}$, mais encore $P^{(1)}$ a pour points tous ceux de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$. On pourrait prendre cette propriété de $P^{(1)}$ comme point de départ de l'explication de l'expression »être condensé dans toute l'étendue d'un intervalle», puisqu'on peut dire: un système de points P est condensé dans toute l'étendue de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ quand son premier dérivé $P^{(1)}$ renferme comme éléments tous les points de $(\alpha \ldots \beta)$.

Si P est condensé dans tout un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, il l'est aussi

dans toute l'étendue d'un autre intervalle quelconque $(\alpha' \ldots \beta')$ contenu dans le premier.

Un système de points P condensé dans toute l'étendue d'un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ est nécessairement du deuxième genre; car alors $P^{(1)}$, et par suite $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ ... sont aussi condensés dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ et cette suite de dérivés de P est illimitée, c. a. d. que P appartient au second genre.

De là nous concluons qu'un système de points P du premier genre n'est sûrement pas condensé dans tout un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, quel que soit d'ailleurs cet intervalle et que, par suite, on peut toujours trouver dans $(\alpha \ldots \beta)$ un intervalle $(\gamma \ldots \delta)$, qui ne renferme pas un seul point de P.

Quant à la question de savoir si réciproquement tout système de points du deuxième genre est de telle nature, qu'il y ait un intervalle dans toute l'étendue duquel il soit condensé, nous nous en occuperons plus tard. Nous arrivons maintenant à un second mode de classification des ensembles linéaires de points non moins important que le premier: il est fondé sur la considération de la *puissance*. Dans le mémoire cité plus haut (Journal de M. Borchardt t. 84) nous avons dit en général de deux ensembles M et N géométriques, arithmétiques ou appartenant à quelque autre catégorie bien définie, qu'ils ont *même puissance,* quand on peut les faire correspondre entre eux d'après quelque loi déterminée, de manière qu'à chaque élément de M corresponde un élément de N et, réciproquement, à chaque élément de N, un élément de M.

Suivant que deux ensembles sont de même puissance ou non, elles peuvent être placés dans une même classe ou dans des classes différentes. On peut appliquer ces règles générales spécialement aux ensembles linéaires de points que l'on partagera par conséquent en classes déterminées; les systèmes de points d'une classe sont tous de même puissance, au contraire les systèmes de points appartenant à différentes classes sont de puissance différente. Chaque système de points particulier peut être considéré comme représentant la classe à laquelle il appartient. Ici se présente en première ligne la classe des systèmes de points qui ont la même puissance que la suite naturelle des nombres: $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ et qu'on peut, par conséquent, représenter sous forme d'une série simplement infinie, dont le terme général dépend de ν.

A cette *première* classe appartiennent par exemple tous les systèmes de points du premier genre; mais beaucoup de systèmes de points du deuxième genre font aussi partie de cette classe, par exemple: 1° le système de points composé de tous les points d'un intervalle qui ont pour abscisses des nombres rationnels (cf. Journal d. M. BORCHARDT, t. 84, p. 250); 2° le système de points composé de tous les points d'un intervalle qui ont pour abscisses des nombres algébriques (cf. Journal de M. BORCHARDT, t. 77, p. 258).

Après cela, se présente à nous une *seconde* classe de systèmes linéaires de points; cette classe est *représentée* par le système des points appartenant à un *intervalle continu,* par exemple par le système de tous les points dont les abscisses sont $\geqq 0$ et $\leqq 1$. A cette classe appartiennent par exemple:

1° Tout intervalle continu $(\alpha \ldots \beta)$.

2° Tout système de points composé de plusieurs intervalles séparés continus $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, ..., en nombre fini ou infini.

3° Tout système de points obtenu en supprimant dans un intervalle continu un ensemble fini ou infini de points $u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$ de la *première* classe (cf. Journal de M. BORCHARDT, t. 84, p. 254).

Nous n'examinerons pas ici, si ces deux classes sont les seules que forment les ensembles infinis et linéaires de points; mais nous voulons démontrer maintenant que ces deux classes sont distinctes en réalité; pour cela il faut d'abord montrer qu'on ne peut pas faire correspondre entre eux point pour point deux représentants quelconques de ces deux classes.

Comme représentant de la deuxième classe choisissons ici l'intervalle continu $(0 \ldots 1)$; si cet ensemble appartenait en même temps à la *première* classe, il devrait exister une série simplement infinie $u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$ composée de tous les nombres réels $\geqq 0$ et $\leqq 1$, en sorte que tout nombre situé dans cet intervalle se présenterait dans cette série à une place déterminée. Mais cette hypothèse est en contradiction avec un théorème très-général que nous avons démontré rigoureusement dans le Journal de M. BORCHARDT, t. 77, p. 260, à savoir:

»*Etant donnée une série simplement infinie*

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_\nu,\ \ldots$$

de nombres réels inégaux progressant d'après une loi quelconque, on peut indiquer dans chaque intervalle proposé ($\alpha \ldots \beta$) un nombre v (et par conséquent on en peut indiquer une infinité) qui ne soit pas compris parmi les termes de cette série.»

En égard au grand intérêt qui s'attache à ce théorème, non seulement dans la présente théorie, mais encore dans beaucoup d'autres questions d'arithmétique ou d'analyse, il ne paraît pas inutile de développer ici, en la modifiant et la simplifiant, la démonstration que nous avons donnée alors.

D'après cela, étant donnée une série

$$u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$$

que nous désignerons par le symbole (u_ν) et un intervalle quelconque $(\alpha \ldots \beta)$ où $\alpha < \beta$; il s'agit de démontrer que, dans cet intervalle on peut trouver un nombre réel v, qui ne se présente pas dans (u_ν).

I. Nous remarquons d'abord que si notre ensemble (u_ν) n'est pas condensé dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, il faut que dans cet intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ il y en ait un autre $(\gamma \ldots \delta)$ dont tous les nombres n'appartiennent pas à (u_ν); on peut donc choisir pour v un nombre quelconque de l'intervalle $(\gamma \ldots \delta)$. Ce cas ne présente donc aucune difficulté et nous pouvons passer à l'autre cas plus compliqué.

II. Supposons l'ensemble (u_ν) condensé dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$. Dans ce cas tout intervalle $(\gamma \ldots \delta)$, si petit qu'il soit, compris dans $(\alpha \ldots \beta)$ contient des nombres de notre série (u_ν). Pour montrer que néanmoins il y a dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ des nombres v qui ne se trouvent pas dans (u_ν), faisons les remarques suivantes. Comme dans notre série:

$$u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$$

il y a certainement des nombres qui se rencontrent dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, il faut qu'un de ces nombres ait le plus petit indice, qu'il soit $u_{\varkappa_1}$, et un autre l'indice immédiatement supérieur: $u_{\varkappa_2}$.

Désignons par α' le plus petit des deux nombres $u_{\varkappa_1}$, $u_{\varkappa_2}$, et le plus grand par β'.

(Ils ne peuvent être égaux entre eux, parce que nous avons supposé notre série composée de nombres inégaux.)

On a alors d'après la définition:

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta,$$

puis: $\varkappa_1 < \varkappa_2$; et il faut remarquer en outre que tous les nombres u_μ de notre série pour lesquels $\mu \leqq \varkappa_2$ ne sont pas situés à l'intérieur de l'intervalle $(\alpha' \ldots \beta')$ comme il ressort immédiatement de la détermination des nombres $u_{\varkappa_1}$, $u_{\varkappa_2}$. De même désignons par $u_{\varkappa_3}$, $u_{\varkappa_4}$ les deux nombres de la série (u_ν) affectés des plus petits indices, que l'on rencontre situés dans les limites de l'intervalle $(\alpha' \ldots \beta')$; soit α'' le plus petit de ces nombres et β'' le plus grand.

On a alors:

$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta',$$

$$\varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4,$$

et on reconnaît que tous les nombres u_μ de notre série pour lesquels $\mu \leqq \varkappa_4$ ne sont pas compris dans l'intérieur de l'intervalle $(\alpha'' \ldots \beta'')$.

Quand on est arrivé, en suivant toujours la même loi, à un intervalle $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$, l'intervalle suivant se tire de ce dernier, en considérant les deux premiers nombres de notre série (u_ν) (c. à d. ceux qui ont les plus petits indices) qui se rencontrent dans l'intervalle $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$; soient $u_{\varkappa_{2\nu-1}}$, $u_{\varkappa_{2\nu}}$ ces deux nombres; on désignera le plus petit d'entre eux par $\alpha^{(\nu)}$, le plus grand par $\beta^{(\nu)}$.

L'intervalle $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ est alors compris dans tous les intervalles précédents et il a avec notre série (u_ν) ce rapport particulier que tous les nombres u_μ pour lesquels $\mu \leqq \varkappa_{2\nu}$ ne sont certainement pas compris dans cet intervalle. Comme évidemment:

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \ldots, \varkappa_{2\nu-2} < \varkappa_{2\nu-1} < \varkappa_{2\nu}, \ldots$$

et que ces nombres, en tant qu'indices, sont des nombres entiers, on a:

$$\varkappa_{2\nu} \geqq 2\nu$$

et par suite:

$$\nu < \varkappa_{2\nu};$$

nous pouvons donc assurer, et cela nous suffit pour ce qui doit suivre, que:

ν étant un nombre entier pris arbitrairement, la grandeur u_ν est en dehors de l'intervalle $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$.

Comme les nombres α', α'', α''', ... $\alpha^{(\nu)}$, ... augmentent constamment de grandeur et sont néanmoins renfermés dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, ils

ent, d'après un théorème fondamental bien connu de la théorie des grandeurs, une limite que nous désignons par A, en sorte que:

$$A = \lim \alpha^{(\nu)} \qquad \text{pour} \quad \nu = \infty.$$

La même chose est vraie pour les nombres β', β'', β''', ... $\beta^{(\nu)}$, ... qui décroissent constamment tous en restant compris dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$; nous désignerons leur limite par B, en sorte que:

$$B = \lim \beta^{(\nu)} \qquad \text{pour} \quad \nu = \infty.$$

On a évidemment:

$$\alpha^{(\nu)} < A \leqq B < \beta^{(\nu)}.$$

Mais il est facile de voir que le cas $A < B$ ne peut se présenter ici; autrement comme tout nombre u_ν de notre série serait en dehors de l'intervalle $(A \ldots B)$, puisque u_ν est en dehors de l'intervalle $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, notre série (u_ν) ne serait pas condensé dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, contrairement à la supposition que nous avons faite.

Il ne reste donc que le cas $A = B$ et il est évident maintenant que le nombre: $v = A = B$ ne se présente pas dans notre série (u_ν).

Car si ce nombre était membre de notre série, soit le $\nu^{\text{ème}}$, on aurait: $v = u_\nu$.

Mais cette dernière équation n'est possible pour aucune valeur de ν, parce que v est compris dans l'intervalle $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, tandis que u_ν est en dehors de ce même intervalle.

Halle a. S. Janvier 1879.

SUR LES ENSEMBLES INFINIS ET LINÉAIRES DE POINTS

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

II.

(Extrait des Annales mathém. de Leipsic, t. 17.)

Pour faciliter, en l'abrégeant, l'exposition qui va suivre, qu'on me permette d'indiquer tout d'abord un système de notations.

Nous exprimerons par la formule $P \equiv Q$ l'identité de deux systèmes de points P et Q. Si les deux systèmes P et Q n'ont aucun élément commun nous dirons qu'ils sont *sans connexion*. Si un système P est composé de la réunion de plusieurs systèmes P_1, P_2, P_3, ..., en nombre fini ou infini, n'ayant deux à deux aucune connexion, nous écrirons:

$$P \equiv (P_1, P_2, P_3, \ldots).$$

Si tous les points d'un système P appartiennent à un autre système Q, nous dirons que P est *contenu* dans Q ou encore que P est un diviseur de Q, Q un multiple de P. Soient P_1, P_2, P_3, ... des systèmes de points quelconques en nombre fini ou infini; ces systèmes ont un plus petit commun multiple que nous désignons par $\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$; ce plus petit commun multiple est le système composé de tous les points différents de P_1, P_2, P_3, ... et n'ayant pas d'ailleurs d'autres points comme éléments; ces systèmes ont de même un plus grand commun diviseur que nous désignons par $\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$ et qui est le système des points communs à tous les P_1, P_2, P_3, ... Par exemple, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ...

étant les dérivés successifs d'un système de points P (v. Art. I), nous pouvons dire que $P^{(2)}$ est diviseur de $P^{(1)}$, $P^{(3)}$ diviseur de $P^{(2)}$ aussi bien que de $P^{(1)}$, et en général $P^{(\nu)}$ diviseur de $P^{(\nu-1)}$, $P^{(\nu-2)}$, ... $P^{(1)}$; au contraire $P^{(1)}$ en général n'est pas diviseur de P; mais si P lui-même est le premier dérivé d'un système Q, $P^{(1)}$ sera diviseur de P.

Il est de plus utile d'avoir un signe qui exprime l'absence de points; nous choisissons pour cela la lettre 0; ainsi $P \equiv 0$ signifie que le système P ne contient pas un seul point, et qu'ainsi, rigoureusement parlant, ce n'est pas un vrai système. Pour en donner ici un exemple, un système de points du premier genre et de la $n^{\text{ème}}$ espèce est caractérisé par $P^{(n+1)} \equiv 0$, au contraire $P^{(n)}$ est différent de 0.

Deux systèmes sont en connexion par leur plus grand commun diviseur, et si ce dernier $\equiv 0$, ils sont sans connexion.

Si deux systèmes de points P et Q ont la même puissance et appartiennent par conséquent à une même classe (art. I), nous les appelons équivalents et nous exprimons cette relation par la formule:

$$P \sim Q.$$

Si on a: $P \sim Q$; $Q \sim R$, on aura toujours aussi: $P \sim R$.

Soient ensuite P_1, P_2, P_3, ... une série de systèmes, qui pris deux à deux n'ont aucune connexion entre eux, Q_1, Q_2, Q_3, ... une autre série dans les mêmes conditions; soit aussi: $P_1 \sim Q_1$; $P_2 \sim Q_2$; $P_3 \sim Q_3$; ..., on aura:

$$(P_1, P_2, P_3, \ldots) \sim (Q_1, Q_2, Q_3, \ldots).$$

Les systèmes de points du premier genre, comme nous venons de le voir, peuvent être caracterisés d'une manière complète par la notion du système dérivé, telle qu'elle a été développée jusqu'ici; pour ceux du second genre cette notion ne suffit plus, et il faut en donner ici une extension qui se présente comme d'elle-même quand on approfondit la question.

Remarquons que dans la série des dérivés $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... d'un système P, chaque terme est diviseur des précédents, et que par suite chaque nouveau dérivé $P^{(\nu)}$ se tire du précédent $P^{(\nu-1)}$ par l'élimination de certains points, sans qu'il s'en rencontre de nouveaux.

Si P est du deuxième genre, $P^{(1)}$ se composera de deux systèmes de points Q et R essentiellement distincts, en sorte que: $P^{(1)} \equiv (Q, R)$; l'un, Q, se compose des points de $P^{(1)}$ qui disparaissent dans la série $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... quand on a suivi cette marche assez longtemps; l'autre R comprend les points qui sont conservés dans tous les termes de la série $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ...; R est donc défini par la formule:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots).$$

Mais nous avons aussi évidemment:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}, \ldots)$$

et en général:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, P^{(n_3)}, \ldots),$$

où n_1, n_2, n_3 est une suite quelconque de nombres entiers positifs croissant à l'infini.

Désignons maintenant par le signe $P^{(\omega)}$ ce système de points R obtenu ainsi à l'aide du système P, et appelons-le le système dérivé de *P d'ordre ω.*

Désignons par $P^{(\omega+1)}$ le premier dérivé de $P^{(\omega)}$, par $P^{(\omega+n)}$ le $n^{\text{ème}}$ dérivé de $P^{(\omega)}$; $P^{(\omega)}$ aura aussi un système dérivé d'ordre ω généralement distincte de 0, et que nous appellerons $P^{(2\omega)}$. En continuant ces opérations, on arrive à des dérivés que nous désignerons conséquemment par: $P^{(n_0\omega+n_1)}$, où n_0, n_1 sont des nombres entiers positifs. Mais nous pouvons aller plus loin et former le système:

$$\mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(2\omega)}, P^{(3\omega)}, \ldots)$$

qui sera désigné par le symbole $P^{(\omega^2)}$.

En répétant maintenant la même opération et en la combinant avec les précédentes, on arrive à une notion plus générale, celle du système dérivé:

$$P^{(n_0\omega^2+n_1\omega+n_2)},$$

et en poursuivant cette marche on arrive à:

$$P^{(n_0\omega^\nu+n_1\omega^{\nu-1}+\ldots+n_\nu)},$$

où n_0, n_1, ... n_ν sont des nombres entiers positifs. En continuant cette généralisation on est amené à considérer ν comme variable et à envisager le système:

$$P^{(\omega^\omega)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\omega)}, P^{(\omega^2)}, P^{(\omega^3)}, \ldots).$$

On obtient successivement, en continuant de même, la notion de systèmes dérivés désignés par:

$$P^{(n\omega^\omega)},\ P^{(\omega^{\omega+1})},\ P^{(\omega^{\omega+n})},\ P^{(\omega^{n\omega})},\ P^{(\omega^{\omega^n})},\ P^{(\omega^{\omega^\omega})}\ \text{etc.}$$

Nous avons ainsi une suite infinie de systèmes, qui se déduisent les uns des autres suivant une loi nécessaire et indépendamment de toute conception arbitraire.

On a, pour les systèmes de points du premier genre, comme il résulte de leur définition même:

$$P^{(\omega)} \equiv 0;$$

il est à remarquer qu'on peut démontrer aussi la réciproque: tout système de points pour lequel cette équation a lieu, est du premier genre; les systèmes du premier genre, sont donc *complètement caractérisés* par cette équation.

Il est facile d'imaginer l'exemple d'un système de points du deuxième genre, pour lequel $P^{(\omega)}$ est composé d'un point donné p. A cet effet, considérons des intervalles qui se suivent, se limitent mutuellement, et convergent en même temps vers le point p en devenant infiniment petits; prenons dans chacun de ces intervalles un système de points du premier genre, dont l'ordre croisse au delà de toute limite, quand l'intervalle correspondant se rapproche de p. La reunion de tous ces systèmes fournit l'exemple en question. Cet exemple résout en même temps la question, posée dans l'art. I, de savoir si, à un système de points du deuxième genre, doit toujours appartenir un intervalle dans toute l'étendue duquel il soit condensé; or nous voyons, par l'exemple indiqué que cela n'a pas lieu nécessairement.

On construit avec la même facilité des systèmes de points du deuxième genre, pour lesquels $P^{(\omega+n)}$ ou $P^{(2\omega)}$ ou plus généralement:

$$P^{(n_0\omega^\nu + n_1\omega^{\nu-1} + \ldots + n_\nu)}$$

ce composent d'un point p déterminé d'avance.

Pour tous les systèmes analogues, il n'existe aucun intervalle dans toute l'étendue duquel ils soient condensés; de plus tous ces systèmes appartiennent à la première classe; à ce double point de vue ils ressemblent aux systèmes de points du premier genre.

Halle, mai 1880.

SUR LES ENSEMBLES INFINIS ET LINÉAIRES DE POINTS

PAR

G. CANTOR

À HALLE a. S.

III.

(Extrait d'un mém. d. Annales math. de Leipsic, t. XX, p. 113.)

Dans les deux articles précédents nous nous en sommes tenus rigoureusement au sujet indiqué par notre titre, et nous nous sommes occupés exclusivement de systèmes de points linéaires, c. à d. d'ensembles de points, donnés d'après une certaine loi et appartenant à une ligne droite continue indéfinie. C'était à dessein que je m'étais borné à ce cas; en effet, d'après les résultats indiqués dans mon travail: *Contribution à la théorie des ensembles,* (Journal de Borchardt, t. 84, p. 242), l'on peut faire correspondre, sans ambiguité, élément par élément, des ensembles à deux, trois, ... n dimensions à des systèmes linéaires de points; et l'on peut admettre a priori que la plupart des propriétés et des relations trouvées pour les ensembles linéaires de points, peuvent se démontrer aussi, avec des modifications faciles à deviner, pour les systèmes de points contenus dans des surfaces ou des espaces continus ou dans des ensembles continus de n dimensions. Mais je voudrais maintenant exposer cette généralisation d'une manière plus précise; car elle n'est pas seulement intéressante en elle-même et au point de vue des applications qu'on en peut faire dans la

théorie des fonctions, mais elle fournit encore de nouveaux points de vue pour l'étude des ensembles linéaires de points.

Pour commencer par un de ces points de vue, on peut étendre immédiatement aux systèmes de points que l'on rencontre dans des ensembles continus de n dimensions, les notions précédemment données sur les dérivés des divers ordres déterminés non seulement par des nombres entiers finis, mais caractérisés dans certains cas par des symboles infinitaires dont la signification a été rigoureusement fixée. La notion de l'ensemble dérivé s'appuie encore ici sur celle de point-limite d'un ensemble de points donné P; et ce point-limite est défini par cette condition que, dans un espace aussi petit que l'on veut entourant ce point, il y a des points du système P autres que ce point lui-même; d'après cette définition le point-limite peut indifféremment appartenir ou ne pas appartenir au système P. M. Weierstrass a le premier enoncé d'une manière générale, et appliqué à la théorie des fonctions, le théorème suivant: tout système de points composé d'un nombre infini de points et situé dans une portion finie et continue d'un ensemble à n dimensions a au moins un point-limite.

L'ensemble de tous les points-limites d'un système P forme un nouveau système de points P', généralement distinct de P, et que j'appelle premier dérivé de P. On tire de là les notions des dérivés d'ordre plus élevé en reproduisant cette même opération un nombre fini ou même infini de fois. A l'égard de ces dérivés successifs se présente toujours ce fait facile à expliquer que tout dérivé, excepté le premier, est contenu dans les ensembles précédents, y compris le premier dérivé P'; tandis que le système donné P contient en général des points qui n'appartiennent pas à ses dérivés. On peut de même appliquer immédiatement aux systèmes à plusieurs dimensions la notion de la *condensation dans un intervalle,* que nous n'avons considérée d'abord que par rapport aux systèmes linéaires de points. Etant donné un système de points P situé dans un ensemble continu G_n à n dimensions, nous dirons que ce système est *condensé dans toute l'étendue* d'un ensemble continu partiel a contenu dans G_n, si tout ensemble a' contenu dans a et ayant le même nombre de dimensions que a renferme des points du système P.

Le premier dérivé P' (et de même tous les suivants) d'un système de points P condensé dans toute l'étendue d'un ensemble continu a renferme l'ensemble continu a lui-même avec tous les points de la limite du

dernier; et réciproquement on peut aussi prendre cette propriété du système de points P comme point de départ pour arriver à la définition de la condensation de ce système dans toute l'étendue de l'ensemble a.

De même la notion de *puissance,* qui renferme en elle-même, comme cas particulier, la notion du nombre entier, ce fondement de la théorie des grandeurs, et que l'on pourrait considérer dans les ensembles comme le moment le plus général, cette notion, dis-je, est loin d'être restreinte aux systèmes de points linéaires; on peut bien plutôt la considérer comme un attribut de tout ensemble bien défini, quelle que soit d'ailleurs la constitution de ses éléments.

Je dis qu'un ensemble d'éléments appartenant à une sphère abstraite quelconque, est *bien défini* quand, par suite du principe logique du troisième exclu, on peut le considérer déterminé de telle façon que 1° un objet quelconque appartenant à cette sphère abstraite étant choisi, l'on puisse regarder comme *intrinsèquement* déterminé s'il appartient ou non au système en question et que 2° deux objets appartenant à l'ensemble étant donnés l'on puisse regarder comme *intrinsèquement* déterminé s'ils sont égaux ou non, malgré les différences qui peuvent se présenter dans la manière dont ils sont donnés.

En fait, on ne pourra pas généralement effectuer d'une manière sûre et précise les déterminations en question *avec les méthodes* ou *les moyens dont on dispose;* mais là n'est pas la question; il ne s'agit que de la détermination intrinsèque dont il faut tirer une détermination actuelle (extrinsèque) en perfectionnant les moyens auxiliaires, dans des cas concrets où cela sera nécessaire.

Pour éclaircir ceci, je rappelle la définition du système de tous les nombres algébriques; on peut, sans aucun doute, le concevoir être déterminé intrinsèquement si un nombre η choisi à volonté appartient ou non aux nombres algébriques; néanmoins le problème qui consiste à trouver cette détermination par rapport à un nombre donné η, est souvent, comme on le sait, un des plus difficiles; et c'est encore par exemple une question toujours indécise, et du plus haut intérêt, de savoir si le nombre π, qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre, est un nombre algébrique, ou, comme c'est beaucoup plus vraisemblable, un nombre transcendant. Le même problème a été résolu il y a huit ans par M. Ch. Hermite, pour le nombre fondamental e du système naturel de loga-

rithmes, dans le travail remarquable: »Sur la fonction exponentielle», (Paris 1874); il y démontre que le nombre e n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients rationnels entiers.

Si l'on a un ensemble géométrique, dont les éléments peuvent être non-seulement des points, mais des lignes, des surfaces ou des solides, et si cet ensemble est *bien défini,* la question de sa puissance se présente encore immédiatement, et cette puissance sera ou égale à une des puissances que l'on rencontre dans des ensembles de points ou plus grande que toutes les puissances de ce genre.

Pour ce qui concerne les systèmes de points compris dans des ensembles continus de n dimensions, j'ai démontré rigoureusement (Journal de Borchardt, t. 84, p. 242) que leurs puissances sont les mêmes que celles des ensembles linéaires de points; ce fait peut être regardé comme une simple conséquence du théorème démontré dans ce Journal, et d'après lequel on peut faire correspondre élément par élément un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu à une dimension et par conséquent à un *continuum linéaire* droit; la question des diverses puissances dans les systèmes de points peut donc, sans rien perdre de sa généralité, se poser seulement pour les systèmes de points linéaires, comme je l'ai fait remarquer à la fin du travail cité tout à l'heure.

J'ai emprunté le mot: *puissance,* à J. Steiner qui l'a employé dans un sens tout à fait spécial, mais cependant toujours analogue, pour exprimer que deux figures, si on les fait correspondre entre elles par projection, sont dans un rapport tel qu'à chaque élément de l'une répond un élément de l'autre, et un seulement; dans la notion absolue de puissance, que l'on rencontre ici, on maintient, il est vrai, la relation réciproque à sens unique, mais on ne fait aucune restriction pour la loi de la correspondance, particulièrement en ce qui regarde la continuité et la discontinuité, en sorte qu'on attribue à deux systèmes la même puissance quand on peut d'après une loi quelconque, établir entre eux une correspondance réciproque à sens unique, et on ne peut leur attribuer la même puissance qu'à cette condition; quand les deux systèmes sont *bien definis,* on peut regarder comme *intrinsèquement* déterminée la question de savoir s'ils ont même puissance ou non; mais la solution actuelle de cette question dans les cas concrets est souvent un des problèmes les plus difficiles. Ce n'est qu'après bien des essais infructueux que j'ai pu réussir, il y a huit ans,

à l'aide d'un théorème démontré dans le Journal de Borchardt, t. 77, p. 260, et dans l'article I du présent travail, à prouver que le *continuum linéaire* n'a pas la même puissance que la série naturelle des nombres.

La théorie des ensembles ainsi conçue, (en ne considérant que ce qui est mathématique et en laissant de côté provisoirement les autres sphères abstraites), comprend l'arithmétique, la théorie des fonctions et la géométrie; ces parties de la science sont ainsi ramenées grâce à la notion de puissance à une unité commune. Le continu et le discontinu sont ainsi considérés au même point de vue et se trouvent ramenées à une commune mesure.

La plus petite puissance que l'on puisse rencontrer généralement dans des systèmes infinis, c. à d. composés d'un nombre infini d'éléments, est la puissance de la série des nombres entiers positifs rationnels; j'ai nommé les ensembles de cette classe systèmes qu'on peut *compter* à l'infini, ou simplement systèmes dénombrables; ce qui les caractérise, c'est qu'on peut les représenter (de bien des manières) sous la forme d'une série régulière simplement infinie:

$$E_1,\ E_2,\ \ldots\ldots\ E_\nu,\ \ldots\ldots,$$

en sorte que chaque élément du système occupe une place déterminée de la série et que la série ne renferme pas d'autres membres que les éléments du système donné.

Chaque partie infinie d'un système dénombrable forme un nouveau système qu'on peut dénombrer à l'infini.

Etant donné un système fini ou infini mais dénombrable de systèmes (E), (E'), (E''), ..., dont chacun est respectivement dénombrable, le système produit par la réunion de tous les éléments de (E), (E'), (E''), ... jouira de la même propriété.

Ces deux propositions simples et faciles à prouver servent de base à l'étude des systèmes dénombrables. Aussi, l'on reconnait, comme je l'ai déjà fait remarquer souvent, que tous les systèmes donnés sous la forme d'une série n-tiplement infinie dont le terme général est $E_{\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ldots\ \nu_n}$ (où ν_1, ν_2, ... ν_n peuvent prendre, indépendamment l'un de l'autre, toutes les valeurs numériques positives entières) sont des systèmes, susceptibles d'être dénombrés, c. à d. qu'on peut les représenter sous la forme

de séries simplement infinies; mais à cette classe appartiennent aussi des systèmes, dont le terme général a la forme:

$$E_{\nu_1, \nu_2, \ldots \ldots \nu_\mu},$$

où μ peut aussi prendre toutes les valeurs numériques positives entières; l'ensemble de tous les nombres algébriques est un exemple particulièrement remarquable de cette dernière espèce d'ensembles (V. J. de Borchardt, t. 77, p. 258). L'arithmétique et l'algèbre présentent une quantité innombrable d'exemples de cette propriété; toutefois la géométrie n'en offre pas en moindre quantité. Le *théorème* suivant qui trouve plus d'une application élégante dans la théorie des nombres et dans celle des fonctions, pourra en fournir la preuve.

Soit, dans un espace continu G_n, de n dimensions, étendu à l'infini de tous côtés, un nombre infini d'ensembles partiels (a), continus,[1] de n dimensions, séparés l'un de l'autre et ne se touchant tout au plus qu'à leurs limites; je dis que le système (a) d'ensembles partiels de cette espèce peut toujours être dénombré.

Il faut remarquer qu'ici on ne fait aucune supposition sur le partage et sur la grandeur de l'espace total des ensembles a; leur étendue peut être aussi petite qu'on voudra, et ils pourront se rapprocher indéfiniment de tout point de G_n qui ne leur appartient pas; le théorème est sans aucune exception, pourvu seulement que chaque ensemble partiel a (tous les a ayant n dimensions d'après l'hypothèse) occupe un volume total déterminé (aussi petit que l'on voudra) et que les divers a ne se rencontrent tout au plus qu'à leurs limites.

On peut démontrer ce théorème de la manière suivante: Je suppose qu'au moyen de rayons vecteurs réciproques on transforme l'espace infini, à n dimensions G_n en une figure H_n à n dimensions comprise à l'interieur d'un espace infini G_{n+1} de $n+1$ dimensions, où H_n est déterminé de telle sorte que ses points sont tous à une distance 1 d'un point fixe de l'espace G_{n+1}. (Pour le cas $n = 1$ ce sera un cercle de rayon 1; pour le cas $n = 2$, une sphère de rayon 1). A chaque ensemble partiel a de G_n à n dimensions correspond un ensemble partiel b de H_n à n

---

[1] Pour chaque figure continue on considère comme en faisant partie les points qui lui servent de limite.

dimensions, et d'étendue déterminée; si maintenant on peut démontrer pour le système (b) la propriété de pouvoir être dénombré, on en déduira, à cause de la correspondance réciproque à sens unique, la même propriété pour le système (a).

Le système (b) est susceptible d'être dénombré parce que le nombre des ensembles b, qui d'après leur étendue sont plus grands qu'un nombre γ donné à volonté, est nécessairement fini; car leur somme est plus petite que le nombre

$$\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

c. à d. plus petite que l'étendue de la figure H_n, dans laquelle les b sont tous compris; il suit de là que l'on peut ordonner les ensembles b, d'après la grandeur de leur étendue, en une série simplement infinie, en sorte que les plus petits suivent les plus grands et finissent par devenir infiniment petits.

Le cas $n = 1$ donne lieu au théorème suivant, qui est essentiel pour le développement de la théorie des ensembles linéaires de points: Tout ensemble *d'intervalles* ($\alpha \ldots\ldots \beta$) distincts, ne se rencontrant tout au plus qu'à leurs points extrêmes, et situés sur une ligne droite indéfinie, est nécessairement un ensemble susceptible d'être dénombré; la même chose est donc vraie aussi pour le système des points extrêmes α et β, mais ne l'est pas toujours pour le dérivé du dernier ensemble de points.

Dans le cas $n = 2$, ce théorème montre que l'on peut dénombrer tout ensemble de surfaces partielles distinctes, ne se rencontrant tout au plus qu'à leurs limites, et situées dans un plan indéfini; ce cas paraît avoir de l'importance dans la théorie des fonctions de variables complexes. Je remarque en même temps qu'il n'est pas difficile d'étendre ce théorème aux ensembles de surfaces partielles distinctes situées sur une surface qui recouvre le plan un nombre fini ou infini de fois.

Quant aux ensembles de points susceptibles d'être dénombrés, ils présentent un phénomène remarquable que je voudrais faire connaître dans ce qui va suivre. Considérons un système de points quelconque (M) condensé dans toute l'étendue d'un ensemble continu G_n à n dimensions,

et jouissant de la propriété de pouvoir être dénombré, en sorte qu'on peut représenter les points appartenant à (M) sous forme de série:

$$M_1, M_2, \ldots\ldots M_\nu, \ldots\ldots;$$

prenons comme exemple, dans notre espace à trois dimensions, le système de tous les points dont les coordonnées, par rapport à un système orthogonal de coordonnées x, y, z, sont toutes trois des nombres algébriques. Imaginons le système dénombrable de points (M), enlevé de l'ensemble G_n et désignons par A l'ensemble qui reste alors; nous avons ce théorème remarquable, que: pour $n \geqq 2$ l'ensemble A ne cesse pas d'être continu et connexe; en d'autres termes, que: deux points quelconques N et N' de l'ensemble A peuvent toujours être réunis par une ligne continue qui appartient, avec tous ses points, à l'ensemble A, en sorte qu'elle ne contient pas un seul point du système (M).

Il suffit de reconnaître la vérité de ce théorème pour le cas $n = 2$; sa démonstration repose essentiellement sur le théorème démontré dans l'art. I, que: si on a une série régulière quelconque de grandeurs réelles:

$$u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots,$$

(parmi lesquelles il peut y en avoir qui soient égales, ce qui évidemment ne change rien au théorème), on peut trouver dans chaque intervalle $(\alpha \ldots\ldots \beta)$ donné arbitrairement, et si petit qu'on le suppose, des grandeurs réelles v, qui ne se présentent pas dans cette série.

Soit en effet G'_2 une portion continue quelconque du plan indéfini; prenons dans G'_2 le système de points (M) supposé dénombrable et condensé dans toute l'étendue de G'_2; soient enfin N et N' deux points quelconques de la portion continue G'_2, n'appartenant pas au système (M) et que nous relions d'abord l'un à l'autre par une ligne continue l comprise dans l'intérieur de G'_2, sans nous inquiéter des points (M); il faut montrer maintenant que la ligne l peut être remplacée par une autre ligne continue l', qui relie aussi l'un à l'autre les points N et N', qui est aussi comprise dans les limites de G'_2, mais qui ne contient pas un seul point du système (M).

En général il y aura sur l un nombre infini de points du système (M), en tout cas ils forment sur cette ligne une partie de (M), par conséquent aussi un système susceptible d'être dénombré.

Par suite du théorème d'arithmétique qui vient d'être mentionné, il y a donc dans chaque intervalle de la ligne l, si petit qu'il soit, des points qui n'appartiennent pas à (M). Considérons un nombre fini N_1, N_2, ... $N_\varkappa$, de ces points de la ligne l, tels que les segments de droites NN_1, N_1N_2, ... $N_\varkappa N'$ soient aussi comprises en entier dans l'intérieur de G'_2. On peut toujours remplacer ces segments par des arcs de cercle ayant les mêmes points extrêmes, compris aussi dans les limites de G'_2, ne renfermant pas un seul point du système (M) et formant, par leur réunion, une ligne continue l' ayant les caractères décrits plus haut.

Il suffira de démontrer cette proposition pour un des segments, par exemple pour le premier NN_1.

Les cercles qui passent par les points N et N_1 forment un groupe continu, simplement infini; leurs centres sont sur une droite déterminée g; déterminons la position d'un de ces centres par sa distance u à un point fixe O de la droite g, cette distance étant affectée d'un signe; on peut alors en tout cas faire varier u dans un intervalle $(\alpha \ldots\ldots \beta)$ tel que, pour chaque cercle correspondant à un de ces u, un des deux arcs de cercle qui relient N et N_1 se trouve tout entier dans l'ensemble G'_2.

Les centres des cercles de notre groupe qui passent par les points:

$$M_1, M_2, \ldots\ldots M_\nu, \ldots\ldots$$

du système M, forment sur la droite g un système de points susceptible d'être dénombré:

$$P_1, P_2, \ldots\ldots P_\nu, \ldots\ldots,$$

les valeurs correspondantes de u étant:

$$u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots$$

Si on prend alors dans l'intervalle $(\alpha \ldots\ldots \beta)$ un nombre v qui ne soit égal à aucun u_ν (ce qu'on peut toujours faire d'après le théorème cité), on obtient, en faisant $u = v$, un cercle du groupe, sur la circonférence duquel ne se trouve pas un seul point du système (M) et qui, à cause de $\alpha < v < \beta$, nous présente un arc de cercle reliant les points N et N_1, dans les conditions demandées.

Il est donc démontré que, étant donnés deux points quelconques N et N' de l'ensemble A', qui reste de l'ensemble G'_2 après qu'on en a

enlevé un système de points (M) condensé dans toute son étendue et susceptible d'être dénombré, on peut relier ces deux points par une courbe continue l' composée d'un nombre fini d'arcs de cercle, et appartenant avec tous ses points à l'ensemble A', c. à d. ne contenant pas un seul point du système (M).

Du reste on pourrait aussi, par le même moyen, relier les points N et N' par une ligne continue se développant d'après une loi analytique unique, et comprise tout entière dans l'ensemble A'.

A ces théorèmes se rattachent des considérations sur la nature de l'espace réel à trois dimensions qui doit servir de base à la description et à l'explication des phénomènes qui se présentent dans le monde réel. On sait que cet espace, soit à cause des formes qui s'y rencontrent, soit surtout à cause des mouvements qui y ont lieu, est considéré comme généralement continu. D'après les travaux publiés en même temps, mais indépendants l'un de l'autre, de Dedekind (V. l'opuscule: La continuité et les nombres irrationnels, R. Dedekind, Brunswick, 1872) et de l'auteur, cette dernière supposition consiste seulement en ce que tout point, dont les coordonnées x, y, z par rapport à un système de coordonnées rectangulaire sont fournies par des nombres réels déterminés quelconques, rationnels ou irrationnels, est considéré comme appartenant réellement à l'espace; il n'y a à cela aucune nécessité intrinsèque et il n'y faut voir qu'une construction arbitraire, quoique légitime. L'hypothèse de la continuité de l'espace n'est donc rien autre chose que la supposition, arbitraire en elle-même, de la correspondance complète, réciproque et à sens unique entre le continu purement arithmétique à trois dimensions (x, y, z) et l'espace qui sert de base au monde des phénomènes.

Nous pouvons facilement par la pensée faire abstraction de points isolés de l'espace, même quand ils sont condensés dans toute une étendue, et aboutir à la notion d'un espace discontinu à trois dimensions A, dans les conditions décrites plus haut. Quant à la question qui se présente alors, de savoir si on peut aussi imaginer un mouvement continu dans des espaces ainsi discontinus, il faut, d'après ce qui précède, y répondre affirmativement, et d'une manière absolue; car nous avons montré qu'on peut relier deux points quelconques d'une figure A par un nombre infini de lignes continues parfaitement regulières. On arrive donc à cette conséquence remarquable qu'on ne peut rien conclure immédiatement, du seul

fait du mouvement continu, pour la continuité générale de l'espace à trois dimensions, tel qu'on l'a conçu pour expliquer les phénomènes du mouvement. On peut donc entreprendre l'essai d'une mécanique modifiée, applicable aux espaces de la même nature que A: grâce aux résultats de ces recherches, que l'on comparera avec les faits, on arrivera peut-être à obtenir des points d'appui réels pour l'hypothèse de la continuité générale de l'espace, tel qu'on le conçoit dans la pratique.

Berlin, le 31 Mars 1882.

SUR LES ENSEMBLES INFINIS ET LINÉAIRES DE POINTS

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

IV.

(Traduction d'un mémoire publié dans les Annales mathématiques de Leipsic, t. XXI, p. 51.)

Nous avons maintenant à énoncer et à démontrer divers théorèmes nouveaux qui se rattachent aux développements donnés précédemment, et qui sont à la fois intéressants en eux-mêmes et utiles pour la théorie des fonctions. Nous nous servirons de la notation suivante.

Soient plusieurs ensembles de points P_1, P_2, P_3, ... qui n'ont deux à deux aucun *point commun,* et P le système résultant de leur réunion, nous choisirons, au lieu des formules employées plus haut, (t. XVII, p. 355), la formule plus commode:

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \ldots .$$

Et par conséquent, Q étant un ensemble contenu dans P et R le système qui reste quand on enlève Q de P, on pourrait écrire:

$$R \equiv P - Q.$$

Un système de points Q, que nous nous représentons dans un espace continu à n dimensions, peut être dans des conditions telles qu'aucun des

points qui lui appartiennent ne soit en même temps un point-limite; nous donnerons à ce système, pour lequel

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv 0,$$

le nom de système de points *isolé*. Si l'on a un système de points quelconque non isolé P, on peut en tirer un système isolé Q, en enlevant de P le système $\mathfrak{D}(P, P')$.

On a donc:

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P')$$

et par conséquent:

$$P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P').$$

Tout ensemble de points peut donc être composé d'un ensemble isolé Q et d'un autre ensemble R, qui est diviseur de l'ensemble dérivé P'. Si nous remarquons ensuite, ce qui a déjà été signalé souvent, que chaque dérivé supérieur d'un système P est contenu dans le dérivé précédent, nous voyons que:

$$P' - P'', \quad P'' - P''', \; \ldots\ldots \; P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)}, \; \ldots\ldots$$

sont tous des systèmes isolés.

Mais on a les décompositions, très-importantes pour ce qui doit suivre:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots\ldots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

et

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots\ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \text{à l'infini} + P^{(\omega)}.$$

Maintenant le théorème suivant est vrai pour les systèmes de points isolés:

Théorème I. Tout ensemble de points isolé peut être *dénombré,* et appartient par conséquent à la première classe.

Démonstration. Soient Q un système de points isolé quelconque compris dans un espace à n dimensions, q un point de ce système, q', q'', q''' ..... les autres points de Q.

Les distances $\overline{qq'}$, $\overline{qq''}$, $\overline{qq'''}$, ... ont une limite inférieure, que je désigne par ρ.

Soient de même ρ' la limite inférieure des distances $q'q, q'q'', q'q''', \ldots, \rho''$ la limite inférieure des distances $q''q, q''q', q''q''', \ldots$ etc.

Toutes ces grandeurs $\rho, \rho', \rho'', \rho''' \ldots$ sont distinctes de zéro, parce que Q est un ensemble isolé.

Qu'on trace, avec q comme centre, la figure à $(n-1)$ dimensions, dont les points sont à la distance $\frac{\rho}{2}$ de q; cette figure borne une sphère pleine à n dimensions, que nous désignerons par K. Qu'on forme de même une sphère pleine K' ayant pour centre le point q' et pour rayon $\frac{\rho'}{2}$, une sphère pleine K'' ayant pour centre le point q'' et pour rayon $\frac{\rho''}{2}$, etc.

Il est maintenant essentiel de remarquer que deux quelconques de ces sphères pleines, par ex. K et K' peuvent tout au plus être tangentes entre elles, mais sont d'ailleurs complètement extérieures l'une à l'autre.

Cela dérive de ce que, d'après la définition des grandeurs ρ et ρ', elles sont plus petites que $\overline{qq'}$ ou égales à $\overline{qq'}$, et que par conséquent les rayons $\frac{\rho}{2}, \frac{\rho'}{2}$ des deux sphères K et K' ne sont pas plus grands que la moitié de la ligne des centres $\overline{qq'}$.

Par conséquent les sphères pleines $K, K', \ldots$ forment un ensemble de portions, extérieures l'une à l'autre et à n dimensions, de l'espace à n dimensions que nous avons pris pour base; mais un ensemble de cette espèce peut toujours être dénombré, comme on l'a démontré t. XX, p. 117. Par conséquent les centres $q, q', q'', \ldots$ forment aussi un système susceptible d'être dénombré, c. à d. que Q peut être dénombré.

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes suivants.

Théorème II. Si le dérivé P' d'un ensemble de points P peut être dénombré, P jouit aussi de la même propriété.

Démonstration. Qu'on désigne par R le plus grand commun diviseur de P et de P', en sorte que:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P, P')$$

et qu'on pose:

$$P - R \equiv Q.$$

Q est alors, comme nous l'avons vu plus haut, un ensemble isolé, et par conséquent susceptible d'être dénombré d'après le théorème I.

R jouit de la même propriété, comme élément constitutif du système P', susceptible d'être dénombré, d'après l'hypothèse.

La réunion de deux systèmes susceptibles d'être dénombrés donne toujours lieu à un nouveau système qu'on peut également dénombrer; par conséquent $P \equiv Q + R$ est susceptible d'être dénombré.

Théorème III. Tout ensemble du premier genre et de la $n^{\text{ème}}$ espèce peut être dénombré.

1ère Démonstration. Le théorème est évident pour les systèmes de points d'espèce 0 qui sont évidemment des systèmes de points isolés. Mais nous allons développer complètement l'induction, en supposant le théorème vrai pour les systèmes de points de $0^{\text{ème}}$, de $1^{\text{ère}}$, de $2^{\text{ème}}$, ... de $(n - 1)^{\text{ème}}$ espèce, et nous allons montrer, avec cette hypothèse, qu'il est vrai aussi pour les systèmes de points de la $n^{\text{ème}}$ espèce.

Soit P un système de points de la $n^{\text{ème}}$ espèce, P' sera de la $(n - 1)^{\text{ème}}$ espèce; P' est donc susceptible d'être dénombré, d'après l'hypothèse, et par conséquent P l'est aussi d'après le théorème II.

2e Démonstration. P étant un système de points de la $n^{\text{ème}}$ espèce, $P^{(n)}$ sera de l'espèce 0, et par conséquent un système de points isolé. On a alors:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots\ldots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}.$$

Tous les éléments du côté droit $(P' - P'')(P'' - P''')$, ... $(P^{(n-1)} - P^{(n)})$ et $P^{(n)}$ sont des ensembles isolés, par conséquent tous susceptibles d'être dénombré d'après le théorème I; le système P' formé par leur réunion, est donc susceptible d'étre dénombré et, d'après le théorème II, P le sera aussi.

Théorème IV. Tout système de points du deuxième genre, pour lequel $P^{(\omega)}$ est susceptible d'être dénombré, jouit aussi de la même propriété.

La démonstration de ce théorème ressort de la décomposition suivante:

$$P' \equiv (P' - P'') + \ldots\ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \ldots\ldots \text{ à l'infini } + P^{(\omega)}.$$

En effet comme tous les éléments de droite sont susceptibles d'être dénombrés et que l'ensemble de ces éléments est de la première puissance, on tire de là pour P' et d'après le théorème II pour P, la propriété de pouvoir être dénombré.

Si on désigne par α un quelconque des symboles d'infini introduits t. XVII p. 357, on a le théorème plus général:

Théorème V. Tout système de points P du deuxième genre pour lequel $P^{(\alpha)}$ est susceptible d'être dénombré, jouit aussi de la même propriété.

Ce théorème se démontre, à l'aide de l'induction complète, comme les théorèmes III et IV.

On peut aussi formuler les derniers théorèmes de la manière suivante:

P étant un système de points non-susceptible d'être dénombré, $P^{(\alpha)}$ ne le sera pas non plus, soit que α soit un nombre entier fini, ou un des symboles d'infini.

Dans leurs travaux sur certaines généralisations de théorèmes du calcul intégral, M.M. du Bois-Reymond et Harnack emploient des systèmes de points linéaires que l'on peut renfermer dans un nombre fini d'intervalles, en sorte que la somme de tous les intervalles est plus petite qu'une grandeur donnée à volonté.

Pour qu'un système de points linéaire jouisse de cette propriété, il faut évidemment qu'il ne soit condensé dans toute l'étendue d'aucun intervalle, si petit qu'il soit; cependant cette dernière condition ne paraît pas suffisante pour qu'un système de points soit tel que nous venons de le dire. En revanche nous pouvons démontrer le théorème suivant.

Théorème VI. Un système de points linéaire P contenu dans un intervalle (a, b) étant constitué de telle sorte que son ensemble dérivé P' soit susceptible d'être dénombré, on peut toujours renfermer P dans un nombre fini d'intervalles, la somme de ces intervalles étant aussi petite que l'on voudra.

Dans la démonstration qui va suivre nous nous servirons des théorèmes auxiliaires ci-dessous, dont le premier exprime une propriété connue des fonctions continues, et les deux autres sont le résultat de nos considérations précédentes.

Théorème auxiliaire I. Une fonction continue $\varphi(x)$ donnée dans un intervalle (c, d) de la variable continue x, et ayant à ses limites des valeurs inégales $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$, prend une fois au moins une valeur y comprise entre les limites $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$.

Théorème auxiliaire II. Un nombre infini d'intervalles, dans une droite infinie, extérieurs l'un à l'autre, et ne se rencontrant tout au plus qu'à leurs limites, est toujours susceptible d'être dénombré.

Théorème auxiliaire III. Si l'on a un ensemble de grandeurs, qui est de la première puissance:

$$u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots$$

on peut, dans tout intervalle proposé, trouver une grandeur v qui ne se rencontre pas parmi ces grandeurs.

Démonstration du théorème VI. Prenons, pour simplifier, l'intervalle (a, b), qui comprend P, de sorte que $a = 0$, $b = 1$; on peut facilement, par une transformation, ramener le cas général à ce cas particulier. P se trouve donc dans l'intervalle $(0, 1)$; la même chose est évidemment vraie pour P' et pour le système produit par la réunion des points de P et P' et que nous désignerons par Q.

On a:

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P').$$

Nous désignons ensuite par R le système de points compris dans l'intervalle $(0, 1)$ et qui est constitué par les points restants dans cet intervalle après qu'on en a enlevé le système Q, en sorte que:

$$(1) \qquad (0, 1) \equiv Q + R.$$

De ce que le système P' est susceptible d'être dénombré, comme on l'a supposé, on tire d'abord les conclusions suivantes:

1. P est aussi susceptible d'être dénombré, d'après le théorème II, par conséquent il en est de même de Q.

2. P et par conséquent P' ne sont condensés dans toute l'étendue d'aucun intervalle; car si P était condensé dans toute l'étendue de l'intervalle (i, k), tous les points de cet intervalle appartiendraient à P' et, d'après le théorème auxiliaire III, P' ne pourrait pas être dénombré. Par conséquent Q n'est condensé dans toute l'étendue d'aucun intervalle. Les valeurs des coordonnées, qui correspondent aux points du système Q, susceptible d'être dénombré, peuvent être appelées

$$(2) \qquad u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots$$

Si maintenant nous considérons le système R, on peut montrer que les valeurs des coordonnées correspondant à ses points sont situées respectivement dans l'intérieur d'une série infinie d'intervalles:

(3) $$(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots\ldots (c_\nu, d_\nu), \ldots\ldots$$

extérieurs l'un à l'autre et compris dans l'intervalle (0, 1). Comme les valeurs intérieures à ces intervalles appartiennent seules à des points du système R, il résulte de la relation (1) que les limites c_ν et d_ν de ces intervalles correspondent à des points du système Q, et par conséquent se présentent dans la série (2).

En effet, soit r un point de R, les points de Q ne peuvent pas se rapprocher à l'infini de r, parce qu'autrement r serait point-limite de P et par conséquent appartiendrait à Q. Il doit maintenant y avoir à gauche de r un point c et à droite de r un point d, tels qu'aucun point de Q ne se trouve dans l'intervalle (c, d) et que par contre il y ait en dehors de cet intervalle, des points de Q aussi rapprochés qu'on le voudra de c et de d, au cas où c et d ne sont pas des points isolés de Q; mais comme chaque point-limite de Q appartient à Q, c et d, même dans le dernier cas, appartiennent aussi à Q. Les intervalles en nombre infini (c, d), ainsi obtenus, sont tous, évidemment, extérieurs l'un à l'autre et forment par conséquent, d'après le théorème auxiliaire II, un système susceptible d'être dénombré (3), ce qu'il fallait démontrer.

Puisque nous supposons $c_\nu < d_\nu$, la grandeur de l'intervalle (c_ν, d_ν) est:

$$= d_\nu - c_\nu.$$

La somme de toutes ces grandeurs d'intervalles s'appellera σ, en sorte que:

(4) $$\sum_{\nu=1}^{\prime} (d_\nu - c_\nu) = \sigma.$$

On voit a priori que $\sigma \overline{<} 1$, parce que les intervalles sont tous extérieurs l'un à l'autre et sont contenus dans l'intervalle (0, 1). Si nous pouvions prouver que $\sigma = 1$, notre théorème VI serait démontré, comme on peut s'en convaincre par une considération très-simple se rattachant au sens des intervalles (c_ν, d_ν).

Toute notre démonstration se réduit donc à prouver que l'hypothèse $\sigma < 1$ conduit à une contradiction.

Pour cela nous définissons, pour $0 < x \overline{<} 1$, une fonction $f(x)$ comme il suit: Qu'on additionne les grandeurs de tous les intervalles (c_ν, d_ν),

tant que ces intervalles tombent dans les limites de l'intervalle $(0, x)$ et qu'on pose cette somme $= f(x)$. (On convient de ne prendre dans cette somme, d'un intervalle (c_ν, d_ν) qui se trouve, en partie, en dehors de $(0, x)$, que la partie correspondante qui tombe dans les limites de $(0, x)$.)

On a évidemment:

$$f(1) = \sigma.$$

Si de plus on établit que $f(0) = 0$, il s'ensuit facilement que $f(x)$ est une fonction continue de x pour $0 \leq x \leq 1$.

En effet de la définition de $f(x)$ il résulte immédiatement que, x et $x + h$ étant deux valeurs distinctes de l'intervalle $(0, 1)$, on a pour des valeurs positives de h:

$$f(x + h) - f(x) \begin{smallmatrix} > 0 \\ \leq h \end{smallmatrix}.$$

De là on conclut la continuité de $f(x)$.

On voit alors aussitôt, en revenant à la définition de $f(x)$, que, si x et $x + h$ sont deux valeurs distinctes d'un seul et même intervalle partiel (c_ν, d_ν), on a:

$$f(x + h) - f(x) = h,$$

par conséquent aussi:

$$(x + h) - f(x + h) = x - f(x).$$

Si donc on introduit la fonction

$$\varphi(x) = x - f(x),$$

$\varphi(x)$ sera aussi une fonction continue de x qui change sans diminuer de 0 à $1 - \sigma$, si x croît de 0 à 1. Ce changement se fait de telle façon que, dans les limites d'un des intervalles partiels (c_ν, d_ν), la fonction continue $\varphi(x)$ conserve une valeur constante.

De là résulte pour la fonction $\varphi(x)$ cette propriété que: toutes les valeurs qu'elle prend sont épuisées par la série de valeurs:

(5) $$\varphi(u_1),\ \varphi(u_2),\ \ldots\ldots\ \varphi(u_\nu),\ \ldots\ldots$$

En effet x peut être égalé à une des valeurs u, et dans ce cas nous avons:

$$\varphi(x) = \varphi(u_\nu).$$

Ou bien x est une valeur comprise dans un des intervalles (c_ν, d_ν); dans ce cas, à cause de la constance de $\varphi(x)$ dans un de ces intervalles, nous avons:

$$\varphi(x) = \varphi(c_\nu) = \varphi(d_\nu).$$

Mais maintenant, comme nous l'avons vu plus haut, les valeurs c_ν et d_ν appartiennent également à la série (2), on a par exemple:

$$c_\nu = u_\lambda.$$

Par conséquent on a aussi dans ce cas:

$$\varphi(x) = \varphi(u_\lambda).$$

La série (5) comprend donc toutes les valeurs que peut prendre généralement $\varphi(x)$.

Le système de valeurs, que peut prendre la fonction continue $\varphi(x)$, est par conséquent susceptible d'être dénombré.

Si maintenant $\sigma < 1$, et par suite $1 - \sigma$ distinct de zéro, la fonction continue $\varphi(x)$, d'après le théorème auxiliaire I prendrait au moins une fois toute valeur y entre 0 et $1 - \sigma$. Par conséquent, dans la série (5) qui épuise toutes les valeurs prises par la fonction $\varphi(x)$, comme on vient de le montrer, on trouverait tous les nombres possibles de l'intervalle $(0, 1 - \sigma)$, ce qui est en contradiction avec le théorème auxiliaire III. Il ne reste donc que l'hypothèse $\sigma = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Hartzbourg, 1[er] Septembre 1882.

FONDEMENTS D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES ENSEMBLES

PAR

G. CANTOR

À HALLE a. S.

(Extrait d'un article des Annales mathématiques de Leipsic, t. XXI, pag. 545.)

§ 1.

Dans l'exposition de mes recherches sur la théorie des ensembles, je suis maintenant arrivé à un point où il me faut développer une généralisation de la notion de nombre entier réel, et ce développement m'entraîne dans une direction où personne, à ma connaissance, ne s'est engagé jusqu'à présent.

Je me trouve contraint de développer cette notion de nombre au point que je pourrais à peine, sans cela, avancer dans la théorie des ensembles; que cette nécessité où je me trouve placé me serve de justification ou d'excuse, si cela était nécessaire, pour avoir introduit dans mon travail un ordre d'idées qui y paraît étranger. Car il s'agit de développer cette notion dans le but de continuer la série des nombres entiers réels au-delà de l'infini; si hardie que paraisse cette tentative, je puis exprimer non-seulement l'espoir, mais la ferme conviction qu'avec le temps on considérera ce développement comme très-simple, très-naturelle et parfaite-

ment accessible. En même temps je ne me dissimule pas cependant que par cette entreprise, je me mets en contradiction, dans une certaine mesure, avec les idées généralement répondues sur l'infini mathématique et avec les opinions qu'on a souvent défendues sur l'essence de la grandeur numérique.

Pour ce qui concerne l'infini mathématique, dans la mesure où jusqu'à présent, il a pu être employé légitimement dans la science et contribuer à ses progrès, il me semble qu'il se présente en première ligne dans le sens d'une grandeur variable, croissant au-delà de toute limite ou décroissant autant que l'on voudra, mais restant toujours finie. Je donne à cet infini le nom *d'infini improprement dit.*

Mais dans ces derniers temps il s'est formé, soit dans la géométrie, soit particulièrement dans la théorie des fonctions, un nouveau genre de notions d'infini, tout aussi légitimes; ainsi, d'après ces notions nouvelles, dans la recherche d'une fonction analytique d'une grandeur complexe variable, l'usage s'est imposé généralement de se représenter, dans le plan qui représente la variable complexe, un point unique situé dans l'infini, c. à d. infiniment éloigné, mais néanmoins déterminé, et d'examiner la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de ce point absolument comme dans le voisinage d'un autre point quelconque; on voit alors que la fonction dans le voisinage du point infiniment éloigné, se comporte précisément de la même manière que s'il s'agissait de tout autre point placé dans le fini, en sorte qu'on est pleinement autorisé par là à se représenter l'infini, dans ce cas, comme transporté sur un point tout à fait déterminé.

Quand l'infini se présente sous une forme ainsi déterminée, je l'appelle *infini proprement dit.*

Pour comprendre ce qui va suivre, distinguons bien ces deux formes sous lesquelles s'est présenté l'infini mathématique et sous lesquelles il a contribué aux plus grands progrès dans la géométrie, dans l'analyse, et dans la physique mathématique.

Sous sa première forme *d'infini improprement dit,* il se présente comme un fini variable; sous sa seconde forme que j'appelle *l'infini proprement dit,* il se présente comme un infini absolument déterminé. Les nombres réels entiers infinis que je définirai dans la suite et auxquels j'ai été amené il y a déjà de longues années, sans m'être assuré d'y trouver des

nombres concrets à sens réel,[1] n'ont absolument rien de commun avec la première de ces deux formes, l'infini improprement dit; ils ont au contraire *le même caractère de détermination* que nous trouvons, dans la théorie des fonctions analytiques, pour le point infiniment éloigné; ils appartiennent donc aux formes et aux affections *de l'infini proprement dit.* — Mais tant que le point reste isolé dans l'infini du plan de nombres complexes en face de tous les points qui sont dans le fini, nous obtenons non-seulement *un* nombre entier infini, mais une suite infinie de ces nombres bien distincts les uns des autres et ayant, soit entre eux, soit avec les nombres entiers finis, des rapports réguliers .....

Ces rapports ne sont guère de ceux que l'on peut, au fond, ramener à des rapports de nombres finis entre eux; ce phénomène a lieu sans doute, mais il ne se présente fréquemment que dans les degrés et les formes diverses de *l'infini improprement dit,* par exemple dans les fonctions d'une variable x qui deviennent infiniment petites ou infiniment grandes, au cas où elles ont des numéros d'ordre finis déterminés en tendant à l'infini. Ces rapports, en fait, ne peuvent être considérés que comme une espèce de rapports du fini, ou comme pouvant s'y ramener immédiatement; les lois relatives aux *nombres entiers proprement infinis* sont par contre complètement différentes des dépendances que l'on trouve dans le fini.

Les *deux principes de formation,* à l'aide desquels on définit les nouveaux nombres infinis déterminés, comme on pourra s'en convaincre, sont tels qu'en les appliquant ensemble, on peut dépasser toutes les limites dans la formation abstraite des nombres entiers réels; mais heureusement on a d'autre part, comme nous le verrons, un *troisième* principe que j'appelle *principe d'arrêt* ou de *limitation,* et grâce auquel on peut donner certaines limites successives au procédé de formation qui est absolument sans fin; nous obtiendrons ainsi, dans la suite *absolument infinie* des nombres réels entiers, des *divisions naturelles,* que j'appellerai *classes de nombres.*

La *première classe de nombres* (I) est le système des nombres entiers finis 1, 2, 3, ... ν, ...; vient ensuite la seconde classe de nombres (II), composée de certains nombres entiers infinis α se suivant entre eux dans un ordre de succession déterminé:

---

(1) Je les ai appelés jusqu'à présent: »Symboles d'infini définis d'une façon déterminée», v. Ann. math. t. XVII, p. 357, t. XX, p. 113, t. XXI, p. 54.

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ 2\omega,\ 2\omega+1,\ \ldots,\ \nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu,$$
$$\ldots,\ \omega^\omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots,\ \alpha,\ \ldots;$$

la seconde classe de nombres une fois définie, on arrive à la troisième, puis à la quatrième, et ainsi de suite.

L'introduction de ces nouveaux nombres entiers me paraît tout d'abord très-importante pour développer et affermir la notion de *puissance* que j'ai fait entrer dans mes travaux (J. de Borchardt, t. 77, p. 257; t. 84, p. 242) et que j'ai souvent employée dans les premiers numéros du présent travail. D'après cela, à tout système bien défini convient une puissance déterminée, et deux systèmes ont la même puissance, quand on peut établir entre elles, d'élément à élément, une correspondance réciproque à sens unique.

Dans les systèmes finis la *puissance* s'accorde avec le *nombre* des éléments, parce que ces systèmes ont, comme on sait, dans tous les arrangements, le même nombre d'éléments.

Pour les systèmes infinis au contraire, il n'avait été question généralement jusqu'ici, ni dans mes travaux ni ailleurs, d'un *nombre* d'éléments *défini avec précision,* mais on pouvait bien leur attribuer aussi une *puissance déterminée, et complètement indépendante de l'ordre de leurs éléments.*

Il fallait, comme il était facile de le faire voir, concéder la plus petite puissance des systèmes infinis aux ensembles capables d'avoir la correspondance réciproque à sens unique avec la *première* classe de nombres et ayant par suite la même puissance qu'elle. Mais jusqu'à présent on n'avait pas pour les *puissances supérieures,* une définition aussi simple et aussi naturelle.

Les classes de nombres entiers réels infinis déterminés nous apparaissent maintenant comme représentant naturellement, et sous une forme unie la *suite régulière des puissances croissantes de systèmes bien définis.* Je montre de la manière la plus précise que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) ne diffère pas seulement de la puissance de la première classe, mais qu'elle est encore, en réalité, la puissance *immédiatement supérieure;* nous pouvons donc l'appeler *deuxième puissance* ou *puissance de deuxième classe.* On obtient de même, par la *troisième* classe de nombres, la définition de la *troisième puissance, ou puissance de troisième classe, etc. etc.*

§ 11.

Nous avons maintenant à montrer comment on est amené aux définitions de ces nouveaux nombres et de quelle manière on obtient, dans la suite des nombres entiers réels absolument infinie, les divisions naturelles que j'appelle *classes de nombres*. La série (I) des nombres entiers réels positifs $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ doit sa formation à la répétition et à la réunion d'unités qu'on a prises pour point de départ et qu'on considère comme égales; le nombre ν exprime un nombre fini déterminé de répétitions successives de ce genre, aussi bien que de la réunion des unités choisies en un seul tout. La formation des nombres entiers réels *finis* repose donc sur le principe de l'addition d'une unité à un nombre *déjà formé;* j'appelle *premier principe* de formation ce moment qui, comme nous le verrons bientôt, joue aussi un rôle essentiel dans la production des nombres entiers supérieurs. Le nombre des nombres ν de la classe (I), formé de cette manière, est infini et parmi tous ces nombres il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres. Il serait donc contradictoire de parler d'un nombre maximum de la classe (I); toutefois on peut d'autre part imaginer un nouveau nombre, que nous appellerons ω, et qui *servira à exprimer que tout l'ensemble (I) est donné d'après la loi dans sa succession naturelle.* On peut même se représenter le nouveau nombre ω comme la limite vers laquelle tendent les nombres ν, à condition d'entendre par là que ω sera le *premier* nombre entier qui *suivra tous* les nombres ν, en sorte qu'il faut le déclarer supérieur à *tous* les nombres ν. En associant le nombre ω avec les unités primitives on obtient à l'aide du *premier principe* de formation les nombres plus étendus:

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots \omega + \nu, \ldots;$$

comme par là on n'arrive encore une fois à aucun nombre maximum, on imagine un nouveau, que l'on peut appeler 2ω et qui sera le *premier* après tous les nombres obtenus jusqu'à présent ν et $\omega + \nu$; si on applique encore au nombre 2ω le premier principe de formation, on arrive à continuer comme il suit les nombres obtenus jusqu'à présent:

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, \ldots 2\omega + \nu, \ldots$$

La fonction logique qui nous a donné les deux nombres ω et 2ω, est évidemment différente du premier principe de formation; je l'appelle *deuxième* principe de formation des nombres réels entiers et je définis mieux ce principe en disant: *Etant donné une succession quelconque déterminée de nombres entiers réels définis, parmi lesquels il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres, on pose, en s'appuyant sur ce deuxième principe de formation, un nouveau nombre que l'on regarde comme la limite des premiers, c. à d. qui est défini comme étant immédiatement supérieur à tous ces nombres.*

En appliquant et en combinant ces *deux principes* de formation on obtient donc successivement les continuations des nombres que nous avons obtenus jusqu'ici, comme il suit:

$$3\omega,\ 3\omega + 1,\ \ldots\ldots,\ 3\omega + \nu,\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu\omega,\ \mu\omega + 1,\ \ldots\ldots,\ \mu\omega + \nu,\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cependant nous n'en sommes pas venu à la fin, parce que parmi les nombres $\mu\omega + \nu$ il n'y en a pas non plus qui soit plus grand que tous les autres.

Le deuxième principe de formation nous permet donc d'introduire un nombre qui suit immédiatement tous les autres $\mu\omega + \nu$, et que l'on peut appeler ω^2; à ce nombre se rattacheront dans un ordre de succession déterminé:

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu$$

et l'on arrive alors évidemment, en suivant les deux principes de formation, à des nombres de la forme:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu;$$

mais alors le deuxième principe de formation nous amène à poser un nouveau nombre qui sera immédiatement supérieur à tous ces nombres et qu'on pourra désigner par ω^ω.

La formation de nouveaux nombres, comme on le voit, est *sans fin;* en suivant les deux principes de formation on obtient toujours de nouveaux

nombres et de nouvelles séries de nombres, avec une *succession parfaitement déterminée.*

On pourrait donc croire d'abord que nous allons nous perdre à l'indéfini dans cette formation de nouveaux nombres entiers infinis déterminés et que nous ne sommes pas en état *d'arrêter provisoirement* ce procédé sans fin, pour arriver par là à une *limitation semblable à celle que nous avons trouvée, en fait, dans un certain sens, par rapport à l'ancienne classe de nombres* (I); là on n'employait que le premier principe de formation et on ne pouvait pas sortir de la série (I). Mais le deuxième principe de formation ne devait pas seulement conduire au-delà du système de nombres employé jusqu'à présent; il nous apparaît encore certainement comme un moyen qu'on peut combiner avec le premier principe de formation pour arriver à *pouvoir franchir toute limite* dans la formation abstraite des nombres réels entiers.

Mais si nous remarquons maintenant que tous les nombres obtenus jusqu'à présent et ceux qui les suivent immédiatement remplissent une certaine condition, nous verrons que cette condition, *si on la pose comme obligatoire pour tous les nombres à former immédiatement,* nous apparaît comme un *troisième* principe, qui vient s'ajouter aux deux premiers et que j'appelle *principe d'arrêt ou de limitation.* En vertu de ce principe, comme je le montrerai, la deuxième classe de nombres (II), définie par l'adjonction de ce principe, n'acquiert pas seulement une puissance plus élevée que (I), mais *précisément la puissance immédiatement supérieure,* et par conséquent la *deuxième puissance.*

La condition dont nous venons de parler et qui est remplie, comme on peut s'en convaincre immédiatement, par chacun des nombres infinis α définis jusqu'ici, est: *que le système des nombres qui se trouvent, dans la suite des nombres, avant celui qu'on considère* et à partir de 1, soit de la même puissance que la première classe de nombres (I). Prenons, par exemple, le nombre ω^ω, ceux qui le précèdent sont contenus dans la formule:

$$\nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,$$

où μ, ν_0, ν_1, ... ν_μ peuvent prendre toutes les valeurs finies positives entières, y compris zéro, et à l'exclusion de la combinaison: $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \ldots\ldots = \nu_\mu = 0$.

Comme on le sait, ce système peut se mettre sous forme d'une série *simplement* infinie et il a par conséquent *la même puissance que (I).*

Comme alors toute suite de systèmes dont chacun est de la première puissance, donne toujours lieu, si elle est elle-même de la première puissance, à un nouveau système, qui a la même puissance que (I), il est clair qu'en continuant notre suite de nombres on arrive toujours, en fait, à avoir immédiatement de nouveaux nombres qui *remplissent réellement cette condition.*

Nous définissons donc la deuxième classe de nombres (II): l'ensemble de tous les nombres α qu'on peut former à l'aide des deux principes de formation, qui se succèdent suivant un ordre déterminé:

$$\omega,\ \omega + 1,\ \ldots\ldots,\ \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,\ \ldots\ldots,\ \omega^\omega,\ \ldots$$

$$\ldots\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots\ldots,\ \alpha,\ \ldots\ldots$$

et qui sont soumis à cette condition, que tous les nombres qui précèdent le nombre α, à partir de 1, forment un système de la même puissance que la classe de nombres (I).

§ 12.

Nous avons à démontrer tout d'abord ce théorème que: *la nouvelle classe de nombres (II) a une puissance différente de celle de la première classe de nombres (I).*

Ce théorème résulte du suivant:

»*Soit* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \ldots\ldots$ *un système quelconque de la première puissance, de divers nombres de la deuxième classe de nombres (en sorte que nous sommes autorisés à les mettre sous la forme de série simple* (α_ν)*), ou il y a un de ces nombres qui est plus grand que tous les autres, soit* γ*; ou bien, si ce n'est pas le cas, il y a un nombre déterminé* β *de la deuxième classe (II) qui ne se rencontre pas parmi les nombres* α_ν*, en sorte que* β *est plus grand que tous les* α_ν *et que par contre tout nombre entier* $\beta' < \beta$ *est inférieur en grandeur à certains nombres de la série* (α_ν)*; on peut appeler le nombre* γ *ou* β *la limite supérieure du système* (α_ν)*.*»

La démonstration de ce théorème est fort simple: soit $\alpha_{\varkappa_2}$ dans la série (α_ν) le premier nombre plus grand que α_1, $\alpha_{\varkappa_3}$ le premier plus grand que $\alpha_{\varkappa_2}$, etc.

On a alors:

$$1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4 < \ldots\ldots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{\varkappa_2} < \alpha_{\varkappa_3} < \alpha_{\varkappa_4} < \ldots\ldots$$

et $\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda}$, dès que $\nu < \varkappa_\lambda$.

Il peut se faire maintenant que, à partir d'un certain nombre $\alpha_{\varkappa_\rho}$ tous les nombres qui le suivent dans la série (α_ν) soient plus petits que lui; ce nombre est alors évidemment le plus grand de tous et nous avons: $\gamma = \alpha_{\varkappa_\rho}$. Sinon, qu'on imagine le système de tous les nombres entiers plus petits que α_1, à partir de 1, qu'on ajoute immédiatement à ce système celui de tous les nombres entiers $\geqq \alpha_1$ et $< \alpha_{\varkappa_2}$, puis celui de tous les nombres $\geqq \alpha_{\varkappa_2}$ et $< \alpha_{\varkappa_3}$, et ainsi de suite; on obtiendra alors une portion déterminée de nombres successifs de nos deux premières classes de nombres; ce système de nombres est évidemment de la première puissance et par conséquent il existe (d'après la définition de (II)) un nombre déterminé β de l'ensemble (II), qui est immédiatement plus grand que ces nombres. On a donc $\beta > \alpha_{\varkappa_\lambda}$ et par conséquent aussi: $\beta > \alpha_\nu$ parce qu'on peut toujours prendre $\varkappa_\lambda$ assez grand pour dépasser un ν donné et qu'alors $\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda}$.

On voit d'autre part que tout nombre $\beta' < \beta$ est inférieur en grandeur à certains nombres $\alpha_{\varkappa_\nu}$; et ainsi se trouvent démontrées toutes les parties du théorème.

De là résulte que *l'ensemble de tous les nombres de la deuxième classe de nombres (II) n'a pas la même puissance que (I);* car autrement nous pourrions concevoir tout l'ensemble (II) sous la forme d'une série simple:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots\ \alpha_\nu,\ \ldots\ldots$$

qui aurait, d'après le théorème que nous venons de démontrer, un membre maximum γ ou dont tous les membres α_ν seraient inférieurs en grandeurs à un certain nombre β de (II); dans le premier cas le nombre $\gamma + 1$ qui appartient à la classe (II), dans le second cas le nombre β bien qu'appartenant à la classe (II), ne se trouveraient pas dans la série (α_ν), ce qui

est en contradiction avec l'hypothèse de l'identité des systèmes (II) et (α_ν); par conséquent la classe de nombres (II) a une *autre puissance que la classe de nombres (I)*.

Quant au fait, que la seconde des deux puissances des classes de nombres (I) et (II) suit immédiatement la première, c. à d. qu'entre les deux puissances il n'y en a pas d'autre; c'est une conséquence d'un théorème que je vais formuler et démontrer immédiatement.

Cependant, jetons d'abord un regard en arrière et rappelons-nous les moyens par lesquels nous sommes arrivés soit au développement de la notion de nombre entier réel, soit à une nouvelle puissance de systèmes bien définis, distincte de la première; il y avait *trois moments logiques* importants et qu'il faut bien distinguer l'un de l'autre. Ce sont les *deux principes de formation* définis plus haut, et *un principe d'arrêt ou de limitation* qui s'ajoute aux premiers et qui consiste en *ce qu'on ne peut entreprendre, à l'aide d'un des deux autres principes, la formation d'un nouveau nombre entier qu'à une condition nécessaire: c'est que l'ensemble de tous les nombres précédents ait la même puissance qu'une classe de nombres dont on a déjà défini toute l'étendue.* Par cette méthode, en observant ces trois principes, *on peut arriver toujours à de nouvelles classes de nombres et, avec elles, à toutes les puissances diverses, successivement croissantes que l'on rencontre dans la nature matérielle ou immatérielle;* les nouveaux nombres ainsi obtenus ont alors toujours la même précision concrète et la même réalité objective que les précédents; je ne sais donc pas, en vérité, ce qui pourrait nous empêcher de nous servir de ce moyen de formation de nouveaux nombres, quand on voit que, pour le progrès des sciences, il est indispensable d'introduire une nouvelle classe de nombres.

§ 13.

J'arrive maintenant, pour tenir ma promesse, à démontrer que les puissances de (I) et de (II) se suivent immédiatement, en sorte qu'il n'y en a *pas d'autre entre ces deux*.

Si, d'après une loi quelconque, on choisit dans l'ensemble (II) un système (α') de divers nombres α', c. à d. si on conçoit un système quel-

conque (α') contenu dans (II), ce système aura toujours des propriétés que l'on peut exprimer par les théorèmes suivants:

»*Parmi les nombres du système* (α') *il y en a toujours un plus petit que tous les autres.*»

»*Etant donné, en particulier, une suite de nombres de l'ensemble (II):* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_\beta, \ldots\ldots$ *dont la grandeur va toujours en décroissant (en sorte que* $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$, *si* $\beta' > \beta$*), cette série doit finir nécessairement, avec un nombre fini de membres et se termine par le plus petit des nombres; la série ne peut pas être infinie.*»

Il est remarquable que ce théorème, qui est d'une évidence immédiate quand les nombres α_β sont des nombres entiers finis, peut aussi se démontrer dans le cas de nombres infinis α_β. En fait, d'après le théorème précédent que l'on déduit facilement de *la définition de la série de nombres (II),* parmi les nombres α_ν, à ne considérer que ceux où l'indice ν est fini, il y en a un plus petit que tous les autres; soit ce nombre $= \alpha_\rho$, il est évident, qu'à cause de $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, la série α_ν et par conséquent aussi toute la série α_β doit être composée précisément de ρ membres, et par suite sera une série finie.

On arrive maintenant au théorème fondamental suivant:

»(α') *étant un système de nombres quelconque contenu dans l'ensemble (II), il ne peut se présenter que les trois cas suivants: ou bien* (α') *est un ensemble fini, c. à d. composé d'une quantité finie de nombres, ou bien* (α') *a la puissance de la première classe (I) ou enfin* (α') *a la puissance de la classe (II); il n'y a pas d'autre cas possible.*»

On peut simplement démontrer ce théorème de la manière suivante: soit Ω le premier nombre de la *troisième* classe de nombres (III): tous les nombres α' du système (α') sont alors plus petits que Ω parce que cette série est contenue dans (II).

Nous nous représentons maintenant les nombres α' *ordonnés d'après leur grandeur:* soit α_ω le plus petit de ces nombres, $\alpha_{\omega+1}$ *le nombre immédiatement supérieur, etc., on a la série* (α') *sous forme d'une série* »*bien ordonnée*» α_β, *où* β *parcourt les nombres de notre série naturelle de nombres développée, à partir de* ω*;* évidemment β reste inférieur ou égal à α_β et comme $\alpha_\beta < \Omega$, on a aussi $\beta < \Omega$. Le nombre β ne peut donc pas sortir de la classe de nombres (II), mais il reste dans les limites de cette classe; il ne peut donc se présenter que trois cas: ou bien β reste au-dessous

d'un nombre assignable de la série $\omega + \nu$, alors (α') est un système fini; ou bien β prend toutes les valeurs de la série $\omega + \nu$, mais reste au-dessous d'un nombre *assignable* de la série (II), et alors (α') est évidemment un système de la première puissance; ou enfin β prend des valeurs aussi grandes qu'on voudra dans (II), alors β parcourt *tous les nombres de (II)*; dans ce dernier cas l'ensemble (α_β) c. à d. le système (α') a *évidemment la même puissance que (II)*.

c. q. f. d.

Comme conséquence immédiate du théorème que nous venons de démontrer, on a les suivants:

»*Etant donné un système quelconque bien défini M de la puissance de la classe de nombres (II), si on prend dans M un système partiel infini quelconque M', on peut concevoir l'ensemble M' sous forme d'une série simplement infinie, ou bien on peut faire correspondre réciproquement les deux systèmes M' et M à sens unique.*»

»*Etant donné un système bien défini quelconque M de la deuxième puissance, un système partiel M' pris dans M, et un système partiel M'' pris dans M', si on sait que le dernier système M'' peut être rapporté d'une manière réciproque et à sens unique, au premier M, on peut toujours aussi faire correspondre le deuxième M', d'une manière réciproque et à sens unique, au premier, et par conséquent aussi au troisième.*»

J'énonce ici ce *dernier* théorème, à cause du rapport qu'il a avec ceux qui précèdent, en supposant que *M* a la *puissance de (II)*; évidemment il est encore vrai quand *M* a la *puissance de (I)*; mais ce qui me paraît très-*remarquable* et ce que je signale ici expressement, c'est que ce théorème est vrai d'une manière générale, quelle que soit la puissance du système *M*. J'y reviendrai plus au long dans un autre travail, et je ferai voir alors l'intérêt particulier qui se rattache à ce théorème général.

§ 2.

Un avantage considérable des nouveaux nombres consiste pour moi dans une notion nouvelle, qui ne s'était pas encore presentée jusqu'ici, celle *du nombre des éléments d'un ensemble infini bien ordonné*; comme cette

notion est toujours exprimée par un nombre complètement déterminé de l'ensemble de nombres que nous avons développé, pourvu seulement que *l'ordre des éléments du sustème, tel que nous le définirons tout à l'heure, soit déterminé,* et comme d'autre part la notion de nombre d'éléments a une représentation objective immédiate, ce rapport entre le nombre des éléments d'un ensemble et le nombre démontre la *réalité* de ce dernier même dans les cas où il est infini et en même temps déterminé.

Par ensemble ou système bien ordonné il faut entendre tout système bien défini, où les éléments sont unis entre eux par une succession donnée et déterminée, d'après laquelle il y a *un premier élément* du système; chaque élément (pourvu qu'il ne soit pas le dernier dans la succession) est suivi immédiatement d'un autre déterminé, et à chaque système arbitraire d'éléments, fini ou infini appartient un élément *déterminé,* qui les suit *immédiatement* dans la succession (pourvu que dans l'ensemble il y a des éléments qui suivent tous les éléments du système partiel considéré). Pour éclaircir soit donné un ensemble (a_ν) de la première puissance; on peut en former de différentes manières des *ensembles bien ordonnés,* par ex. les suivants:

$$(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots\ldots)$$

$$(a_2, a_3, \ldots\ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots\ldots, a_1)$$

$$(a_3, a_4, \ldots\ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots\ldots, a_1, a_2)$$

$$(a_1, a_3, \ldots\ldots, a_{2\nu-1}, a_{2\nu+1}, \ldots\ldots, a_2, a_4, \ldots\ldots, a_{2\nu-2}, a_{2\nu}, \ldots\ldots)$$

etc. etc.

Deux »systèmes bien ordonnés» sont dits avoir *le même nombre* (par rapport aux successions auxquelles ils ont donné lieu), quand on peut établir entre eux *une correspondance réciproque à sens unique telle,* que, E et F étant deux éléments quelconques de l'un, E_1 et F_1 les éléments correspondants de l'autre, la position de E et F dans la succession du premier système s'accorde toujours avec la position de E_1 et F_1 dans la succession de la deuxième série, en sorte que, si E précède F dans la succession de la première série, E_1 précède aussi F_1 dans la succession de la deuxième série. Cette correspondance, si elle est possible, comme il est facile de le voir, est toujours *complètement déterminée,* et comme dans la série des

nombres développée il y a toujours un nombre α, et un seul, tel que ceux qui le précèdent (à partir de 1) aient dans la succession naturelle le même nombre, on est obligé d'égaler directement à α le nombre de ces deux systèmes »bien ordonnés», quand α est un nombre infiniment grand, et de l'égaler à $\alpha - 1$, qui précède immédiatement α, quand α est un nombre entier fini. Par exemple les trois ensembles bien ordonnés:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots)$$
$$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu}, \alpha_{2\nu-1}, \ldots\ldots)$$
$$(1, 2, 3, \ldots\ldots, \nu, \ldots\ldots)$$

ayant le même nombre, celui-ci se trouve d'après notre définition égal à ω.

De même les nombres des ensembles bien ordonnés:

$$(\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1)$$
$$(\alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1, \alpha_2)$$
$$(\alpha_1, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-2}, \alpha_{2\nu}, \ldots\ldots)$$

se trouvent, d'après notre définition, être respectivement égals à $\omega + 1$, $\omega + 2$, 2ω.

La différence essentielle entre les systèmes finis et infinis, c'est qu'un système fini offre le même nombre d'éléments dans toutes les successions que l'on peut leur donner; au contraire un système composé d'un nombre infini d'éléments aura en général divers nombres, d'après la succession que l'on donnera à ses éléments. *La puissance d'un système est, comme nous l'avons vu, un attribut indépendant de l'ordre de ce système; mais le nombre du système nous apparaît comme un facteur dépendant, en général, d'une succession donnée des éléments, dès qu'on a à faire avec des systèmes infinis.* Cependant même dans les systèmes infinis *il y a encore un certain rapport* entre la *puissance* du système et le *nombre* de ses éléments, par rapport à une succession donnée.

Prenons d'abord un système ayant la puissance de la *première classe* et donnons aux éléments une succession déterminée quelconque, de manière à obtenir un système »bien ordonné», le nombre de ce système est toujours un nombre déterminé de la *deuxième* classe de nombres et ne peut jamais

être déterminé par un nombre d'une autre classe que de la deuxième. D'autre part on peut disposer tout système de la première puissance dans un ordre de succession tel que le nombre de ce système, par rapport à cette succession, soit égal à un nombre de la deuxième classe, désigné d'avance arbitrairement. Nous pouvons encore exprimer ces théorèmes comme il suit: *tout système de la puissance de première puissance peut être dénombré par des nombres de la deuxième classe de nombres et par ces nombres seuls, et on peut toujours donner aux éléments du système un ordre de succession tel que le système lui-même dans cette succession est dénombré par un nombre de la deuxième classe de nombres donné à volonté, nombre qui exprime le nombre des éléments du système par rapport à cette succession.*

Les règles analogues s'appliquent aux systèmes de puissances plus élevées. *Ainsi tout système bien défini de la deuxième puissance peut être dénombré par des nombres de la troisième classe de nombres, et par ces nombres seuls, et on peut toujours donner aux éléments du système un ordre de succession tel, que le système lui-même dans cette succession est dénombré* (1) *par un nombre de la troisième classe de nombres donné à volonté, nombre qui détermine le nombre des éléments du système par rapport à cette succession.*

§ 3.

La notion du système bien ordonné nous apparait comme fondamental pour toute la théorie des ensembles. Je reviendrai dans un autre travail sur cette loi fondamentale, ce me semble, très-importante par ses conséquences et remarquable surtout par sa généralité: *on peut toujours mettre tout système bien défini sous la forme d'un système bien ordonné.* Je me borne ici à démontrer comment, de la notion du système bien ordonné, on arrive de la manière la plus simple aux opérations fondamentales pour les nombres entiers, finis ou infinis déterminés, et comment les lois

(1) D'après la définition que nous venons de donner, ce que nous avons appelé, dans les premiers numéros de notre travail, systèmes dénombrables ne sont que des systèmes dénombrables *par* des nombres de la première classe (systèmes finis) ou *par* des nombres de la deuxième classe (systèmes de la première puissance).

de ces opérations se déduisent, avec une certitude évidente, de la considération intrinsèque immédiate. Soient d'abord deux systèmes bien ordonnés M et M_1, auxquels correspondent comme nombres les nombres α et β, $M + M_1$ sera un nouveau système bien ordonné; il y a donc aussi un nombre déterminé qui correspond comme nombre au système $M + M_1$ par rapport à l'ordre de succession que l'on obtient entre ses éléments; ce nombre s'appelle la somme de α et β et se désigne par $\alpha + \beta$; on voit immédiatement que, si α et β ne sont pas finis l'un et l'autre, $\alpha + \beta$ sera en général différent de $\beta + \alpha$. *La loi de commutation cesse donc d'être vraie d'une manière générale pour l'addition.* Et maintenant on arrive si simplement à la notion de la somme de plusieurs nombres donnés dans une suite déterminée, qui peut être elle-même une suite infinie déterminée, que je n'insisterai pas davantage sur ce point; je me contente donc de remarquer que la loi d'association se trouve généralement vraie. On a en particulier:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Si on prend une succession, déterminée par un nombre β, de systèmes tous égaux et également ordonnés, dans chacun desquels le nombre des éléments est égal à α, on obtient un nouveau système bien ordonné dont le nombre donne la définition du produit $\beta\alpha$, où β est le multiplicateur, α le multiplicande; ici encore il se trouve que $\beta\alpha$ diffère généralement de $\alpha\beta$, et par conséquent *la loi de commutation n'est pas vraie non plus d'une manière générale pour la multiplication des nombres.* Par contre la loi d'association s'applique aussi à la multiplication d'une manière générale, en sorte qu'on a: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Parmi les nouveaux nombres, quelques-uns se distinguent des autres par la propriété de nombres premiers; cependant il faut caractériser cette propriété d'une manière un peu plus déterminée, en entendant par nombre premier un nombre α, pour lequel la décomposition $\alpha = \beta\gamma$, où β est multiplicateur, n'est possible que si $\beta = 1$ ou $\beta = \alpha$; par contre le multiplicande aura généralement aussi pour les nombres premiers α un certain champ d'indétermination, ce qui, d'après la nature des choses, ne peut pas se modifier. Néanmoins nous montrerons dans un autre travail que la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers peut toujours avoir lieu d'une manière essentiellement unique et déterminée même au

point de vue de la suite des facteurs (tant que ces facteurs ne sont pas des nombres premiers finis se présentant à côté l'un de l'autre dans le produit). On obtient par là deux espèces de nombres premiers infinis déterminés, dont la première se rapproche des nombres premiers finis, tandis que les nombres premiers de la deuxième espèce ont un tout autre caractère.

Maintenant, à l'aide de ces nouvelles données, j'espère de donner bientôt une preuve rigoureuse du théorème relatif à ce que nous avons appelé les ensembles linéaires infinis, qui se trouve prononcé à la fin de notre travail: »Une contribution à la théorie des ensembles» (Journal de Borchardt, t. 84, p. 257).

Dans le dernier numéro (4) du présent travail (t. XXI, p. 54), j'ai obtenu relativement aux systèmes de points P, qui sont contenus dans un ensemble continu à n dimensions, un théorème que l'on peut énoncer comme il suit, en employant les nouvelles expressions définies plus haut:

»*P étant un système de points, dont le dérivé $P^{(\alpha)}$ s'annule d'une manière identique, où α est un nombre entier pris à volonté dans la première ou la seconde classe, le premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ et par conséquent aussi P lui-même est un système de points de la première puissance.*»

Ce théorème peut se retourner de la manière suivante:

»*P étant un système de points dont le premier dérivé $P^{(1)}$ a la première puissance, il y a des nombres entiers α, appartenant à la première ou à la deuxième classe de nombres, pour lesquels $P^{(\alpha)}$ s'annule d'une manière identique, et parmi les nombres α qui offrent cette particularité, il y en a un plus petit que tous les autres.*»

Je publierai très-prochainement la démonstration de ce théorème. M. Mittag-Leffler publiera ensuite un travail où il montrera comment en se fondant sur ce théorème on peut généraliser d'une manière remarquable le résultat de ses recherches et de celles de M. le Prof. Weierstrass sur l'existence de fonctions analytiques à sens unique avec des positions singulières données.

§ 14.

Je vais maintenant considérer les nombres de la deuxième classe (II) et les opérations qu'on peut effectuer sur ces nombres, en me bornant à l'essentiel, et en réservant à plus tard des recherches plus profondes sur ce sujet.

J'ai défini d'une manière générale dans le § 3 les opérations de l'addition et de la multiplication et j'ai montré que pour les nombres entiers infinis, elles ne sont pas soumises en général à la loi de commutation, mais bien à la loi d'association; cela est donc vrai aussi en particulier pour les nombres de la deuxième classe de nombres. Quant à la loi de distribution, elle est vraie sous la forme suivante:

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(où $\alpha + \beta$, α, β paraissent comme multiplicateurs), comme on peut s'en convaincre immédiatement par la considération intrinsèque.

La soustraction peut être considérée à deux points de vue. Soient α et β deux nombres entiers quelconques, $\alpha < \beta$, on se convainc sans peine que l'équation: $\alpha + \xi = \beta$ admet toujours une solution et une seule, par rapport à ξ; si α et β sont des nombres de (II), ξ sera un nombre de (I) ou (II). Posons ce nombre ξ égal à $\beta - \alpha$.

Si au contraire on considère l'équation suivante:

$$\xi + \alpha = \beta$$

on voit que souvent elle n'est pas résoluble d'après ξ; ce cas, par exemple, se présente pour l'équation:

$$\xi + \omega = \omega + 1.$$

Mais même dans les cas où l'équation: $\xi + \alpha = \beta$ peut être résolue d'après ξ, il se trouve souvent qu'on peut y satisfaire par une quantité infinie de valeurs numériques de ξ; mais parmi ces solutions diverses il y en aura toujours une plus petite que toutes les autres.

Pour désigner cette plus petite racine de l'équation

$$\xi + \alpha = \beta,$$

quand elle est résoluble, choisissons le signe $\beta_{-\alpha}$ qui par conséquent diffère généralement de $\beta - \alpha$.

Si on a ensuite entre trois nombres β, α, γ, l'équation:

$$\beta = \gamma\alpha,$$

(où γ est multiplicateur), on se convainc sans peine que l'équation:

$$\beta = \xi\alpha$$

n'a pas d'autre solution, d'après ξ, que $\xi = \gamma$ et dans ce cas on désigne γ par $\frac{\beta}{\alpha}$.

On trouve au contraire que l'équation:

$$\beta = \alpha\xi$$

(où ξ est multiplicande), si elle est résoluble d'après ξ, a généralement plusieurs racines et en a même un nombre infini; mais il y en a toujours une plus petite que toutes les autres; cette racine minima satisfaisant à l'équation: $\beta = \alpha\xi$, quand cette équation est résoluble, peut se désigner par:

$$\frac{\beta}{\alpha}.$$

Les nombres α de la deuxième classe de nombres sont de deux espèces: 1° les α précédés immédiatement dans la série par un autre nombre qui est alors α_{-1}; je les appelle nombres de la première espèce; 2° les α qui ne sont pas précédés immédiatement, dans la série, par un autre membre, pour lesquels par conséquent il n'y a pas de α_{-1}, et que j'appelle de la deuxième espèce. Les nombres ω, 2ω, $\omega^{\nu} + \omega$, ω^{ω} sont par exemple de la deuxième espèce, au contraire $\omega + 1$, $\omega^2 + \omega + 2$, $\omega^{\omega} + 3$ sont de la première.

De même les nombres premiers de la deuxième classe de nombres, que j'ai définis d'une manière générale au § 3, se divisent aussi en nombres de la deuxième et en nombres de la première espèce.

Les nombres premiers de la deuxième espèce sont, suivant l'ordre où ils se présentent dans la classe de nombres (II):

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^2},\ \omega^{\omega^3},\ \ldots\ldots,$$

en sorte que parmi tous les nombres de la forme:

$$\varphi = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

il n'y a qu'un nombre premier, savoir ω, de la deuxième espèce; mais qu'on ne conclue pas, de cette rareté relative des nombres premiers de la deuxième espèce, que l'ensemble de tous ces nombres a une puissance moindre que la classe de nombres (II) elle-même; il se trouve que cet ensemble a la même puissance que (II).

Les nombres premiers de la première espèce sont tout d'abord:

$$\omega + 1,\ \omega^2 + 1,\ \ldots\ldots,\ \omega^\mu + 1,\ \ldots\ldots$$

Ce sont les seuls nombres premiers de la première espèce que l'on rencontre parmi les nombres que nous venons de désigner par φ; l'ensemble de tous les nombres premiers de la première espèce dans (II) a aussi la puissance de (II).

Les nombres premiers de la deuxième espèce ont une propriété qui leur donne un caractère tout à fait à part; soit η un de ces nombres premiers (de la deuxième espèce), on a toujours $\eta\alpha = \eta$, si α est un nombre quelconque plus petit que η; de là résulte que, si α et β sont deux nombres quelconques, tous deux plus petits que η, le produit $\alpha\beta$ est toujours aussi plus petit que η.

En nous bornant d'abord ici aux nombres de la deuxième classe, qui ont la forme φ, nous trouvons pour ces nombres les règles d'addition et de multiplication qui suivent.

Soit:

$$\varphi = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_\mu$$

$$\psi = \rho_0\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda,$$

où nous supposons ν_0 et ρ_0 autres que zéro.

Addition.

1° Soit $\mu < \lambda$, on a:

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2° Soit $\mu > \lambda$, on a:

$$\varphi + \psi = \nu_0\omega^\mu + \ldots\ldots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \\ + \rho_2\omega^{\lambda-2} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

3° Pour $\mu = \lambda$ on a:

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \rho_0)\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

Multiplication.

1° Si ν_μ est autre que zéro, on a:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_\mu\rho_0\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

Si $\lambda = 0$, le dernier membre à droite est: $\nu_\mu\rho_0$.

2° Si $\nu_\mu = 0$, on a:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^\lambda.$$

La décomposition d'un nombre φ en ses facteurs premiers se fait comme il suit.

Soit:

$$\varphi = c_0\omega^\mu + c_1\omega^{\mu_1} + c_2\omega^{\mu_2} + \ldots\ldots + c_\sigma\omega^{\mu_\sigma}$$

où $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \ldots\ldots > \mu_\sigma$ et $c_0, c_1, \ldots\ldots c_\sigma$ sont des nombres finis positifs autres que zéro, on a:

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)c_2 \ldots\ldots c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)c_\sigma\omega^{\mu_\sigma};$$

si on se représente encore $c_0, c_1, \ldots\ldots c_{\sigma-1}c_\sigma$ décomposés en facteurs premiers d'après les règles de la première classe de nombres, on a alors la décomposition de φ en facteurs premiers; car les facteurs $\omega^\varkappa + 1$ et ω sont eux-mêmes, comme on l'a remarqué plus haut, des nombres premiers. Cette décomposition de nombres de la forme φ en nombres premiers est déterminée, même en égard à la suite de série des facteurs, en faisant abstraction de la commutabilité des facteurs premiers dans les facteurs c et s'il est entendu que le dernier facteur doit être une puissance de ω ou égal à un et que ω ne peut être facteur qu'à la dernière

place. Je reviendrai dans une autre circonstance sur la généralisation de cette décomposition en facteurs premiers, pour des nombres α pris à volonté dans la deuxième classe de nombres (II).

§ 10.

La notion du »continu» n'a pas seulement joué un rôle important dans le développement des sciences en général, elle a encore provoqué de grands partages d'opinion et, par suite, de vives discussions. Cela vient peut-être de ce que l'idée prise pour point de départ a été absolument différente chez les divers auteurs, parce qu'ils n'avaient pas la définition exacte et complète de la notion; mais peut-être aussi, et c'est ce qui me paraît le plus vraisemblable, les Grecs qui ont cherché les premiers à se rendre compte de cette idée du continu, ne l'ont pas conçue aussi claire et aussi complète qu'il aurait fallu pour empêcher les âges suivants de se partager comme il l'ont fait. Ainsi nous voyons que LEUCIPPE, DÉMOCRITE et ARISTOTE considèrent le continu comme un composé de parties divisibles à l'infini, tandis qu'EPICURE et LUCRÈCE en font un composé de leurs atomes finis; de là, ensuite, une grande discussion entre les philosophes, les uns suivant ARISTOTE, les autres EPICURE; d'autres enfin, pour rester en dehors de cette discussion, établirent, avec S. THOMAS d'AQUIN, que le continu n'est pas composé d'un nombre fini ou infini de parties, mais qu'il n'a pas de parties du tout; cette dernière opinion me semble moins une explication que l'aveu tacite qu'on n'est pas arrivé au fond de la question et qu'il vaut mieux la laisser de côté. Nous trouvons ici l'origine de cette idée scolastique du moyen-âge, qui a encore aujourd'hui ses partisans, et d'après laquelle le continu est une idée indécomposable, ou, pour parler avec d'autres auteurs, une pure intuition a priori dont on peut à peine donner une notion déterminée; on regarde comme une tentative sans fondement et on rejette en conséquence tout essai de détermination de ce mystère par l'arithmétique.

Je suis bien loin de vouloir évoquer encore une fois ces discussions, et la place me manquerait dans le cadre étroit de mon travail pour les

traiter d'une manière exacte; je me vois seulement obligé de développer ici, d'une manière aussi brève que possible et seulement au point de vue de la théorie mathématique des systèmes, cette notion du continu. Mais ce travail ne m'a pas été facile, parce que, parmi les mathématiciens dont j'invoque volontiers l'autorité, aucun ne s'est occupé du continu dans le sens où j'ai à le faire ici.

En prenant pour point de départ une ou plusieurs grandeurs réelles ou complexes continues (ou, pour parler, je crois, plus exactement, des systèmes continus de grandeurs), on s'est formé du mieux qu'on a pu la notion d'un continu dépendant, avec un seul ou plusieurs sens, de ces grandeurs, c'est à dire qu'on est arrivé à la notion de fonction continue et ainsi s'est formée la théorie de ce qu'on a appelé les fonctions analytiques, comme aussi des fonctions plus générales avec leurs phénomènes les plus remarquables (comme l'impossibilité de la différentiation et d'autres semblables); mais le continu indépendant lui-même n'a été proposé par les mathématiciens que sous la forme la plus simple et n'a pas été l'objet de considérations plus profondes.

Je dois déclarer tout d'abord qu'à mon avis l'introduction de la notion de temps ou de l'idée de temps ne doit pas servir à expliquer la notion beaucoup plus primitive et plus générale du continu; le temps, à mon avis, est une idée qui suppose, pour être expliquée clairement, la notion de continuité, indépendante de celle du temps, et qui, même avec cette notion de continuité ne peut être conçue ni objectivement comme une substance, ni subjectivement comme une idée nécessaire a priori; cette idée de temps n'est qu'une idée auxiliaire et relative, servant à établir le rapport entre les divers mouvements qui ont lieu dans la nature et que nous percevons. Ainsi jamais il ne se présente dans la nature rien qui ressemble au temps objectif ou absolu et par conséquent on ne peut pas prendre le temps comme mesure du mouvement, mais au contraire on pourrait considérer le mouvement comme mesure du temps, si on n'en était empêché parce qu'on n'a rien gagné à considérer le temps comme une idée subjective nécessaire a priori.

Je suis de même convaincu qu'on ne peut pas commencer par l'idée intuitive de l'espace, pour arriver à des conclusions sur le continu, parce que l'espace et les figures qu'on y conçoit ne peuvent arriver qu'à l'aide d'un continu déjà formé d'une manière abstraite à devenir l'objet non

plus seulement de considérations purement esthétiques, de spéculations philosophiques subtiles ou d'essais faits au hasard, mais de recherches mathématiques positives.

Il ne me reste donc plus qu'à chercher, au moyen des notions de nombres réels définis dans § 9, une idée purement arithmétique, et aussi générale que possible, d'un continu de points. Je prends nécessairement pour point de départ l'espace arithmétique plan à n dimensions G_n, c. à d. l'ensemble de tous les systèmes de valeurs:

$$(x_1 \mid x_2 \mid \ldots\ldots \mid x_n),$$

où chaque x peut avoir indépendamment des autres toutes les valeurs numériques réelles de $-\infty$ à $+\infty$. J'appellerai tout système de valeurs de ce genre un point arithmétique de G_n. La distance de deux de ces points est définie par l'expression:

$$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots\ldots + (x'_n - x_n)^2}$$

et par un système de points arithmétiques P contenu dans G_n on entend tout ensemble donné de points de l'espace G_n. *L'examen aboutit donc à donner une définition exacte et aussi générale que possible, quand on peut appeler l'ensemble P un continu.*

J'ai démontré dans le Journal de Borchardt, t. 84, p. 242, que tous les espaces G_n, si grand que soit le nombre de dimensions n, ont la même puissance entre eux et par suite la même puissance que le continu linéaire, et la même que l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle $(0 \ldots\ldots 1)$. La recherche et la fixation de la puissance de G_n se ramène donc à la même question, spécialisée à l'intervalle $(0 \ldots\ldots 1)$, et j'espère pouvoir bientôt y répondre en démontrant rigoureusement que la puissance cherchée n'est autre que celle de notre deuxième classe de nombres (II). De là résultera que tous les systèmes de points infinis P ont soit la puissance de la première classe de nombres (I) soit celle de la seconde (II). On pourra encore en tirer cette autre conséquence que l'ensemble de toutes les fonctions d'une ou de plusieurs variables pouvant être représentées sous forme de série donnée infinie quelconque, n'a de même que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) et par

conséquent peut être dénombré par des nombres de la troisième classe de nombres (III). Ce théorème se rapportera donc par exemple à l'ensemble de toutes les fonctions »analytiques» d'une ou de plusieurs variables, ou au système de toutes les fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles que l'on peut représenter par des séries trigonométriques.

Pour arriver maintenant à la notion générale d'un continu donné dans G_n, je rappelle la notion de l'ensemble dérivé $P^{(1)}$ d'un ensemble de points P donné à volonté, telle qu'elle a été développée dans le mémoire (Ann. Math. t. V, puis t. XV, XVII, XX et XXI); elle conduit à la notion d'un dérivé $P^{(\gamma)}$, où γ peut être un nombre entier quelconque d'une des classes de nombres (I), (II), (III), etc.

On peut maintenant partager aussi les systèmes de points P en deux classes d'après la puissance de leur premier dérivé $P^{(1)}$. Si $P^{(1)}$ a la puissance de (I), on voit, comme je l'ai déjà dit dans le § 3 de ce mémoire, qu'il y a un premier nombre entier α de la première ou de la deuxième classe de nombres (II), pour lequel $P^{(\alpha)}$ disparaît. Mais si $P^{(1)}$ n'a pas la première puissance, on peut toujours, et d'une seule manière, décomposer $P^{(1)}$ en deux systèmes R et S, en sorte que: $P^{(1)} = R + S$, où R et S sont de nature bien différente:

R est de la première puissance et dans des conditions telles qu'il y a toujours un premier nombre entier γ des classes de nombres (I) ou (II), pour lequel:

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) = 0. \text{ [1]}$$

S au contraire est dans des conditions telles que l'emploi du procédé de dérivation n'y change absolument rien, en sorte que:

$$S \equiv S^{(1)}$$

et par conséquent aussi:

$$S \equiv S^{(\gamma)};$$

j'appelle ces systèmes S *ensembles parfaits de points*. Nous pouvons donc

---

(1) Ce caractère général des ensembles R a été remarqué et démontré par M. Bendixson.

dire: *quand $P^{(\nu)}$ n'a pas la première puissance, $P^{(\nu)}$ se divise à sens unique en un ensemble parfait S et un ensemble R de la première puissance.*

Les systèmes de points parfaits S ne sont pas toujours ce que nous avons appelé *condensé dans toute l'étendue;* c'est pourquoi ils ne se prêtent pas encore à la définition complète d'un continu de points, quand même on est obligé d'accorder immédiatement que le continu doit être toujours un système parfait.

Au contraire il faut encore une notion pour la joindre à celle qui précède et définir le continu: c'est la notion d'un système de points T *bien enchaîné.*

Nous disons que T est un système de points bien enchaîné, quand pour deux points quelconques t et t' de ce système, avec un nombre donné ε aussi petit qu'on voudra, il y a toujours un nombre fini de points t_1, t_2, ... t_ν de T, de plusieurs manières, en sorte que les distances $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}$, ... $\overline{t_\nu t'}$ soient toutes plus petites que ε.

Tous les continus de points géométriques que nous connaissons sont aussi compris, comme il est facile de le voir, sous cette notion du système de points bien enchaîné; mais je crois maintenant reconnaître aussi dans ces deux attributs »parfait» et »bien enchaîné» les caractères nécessaires et suffisants d'un continu de points et je définis par conséquent un continu de points dans G_n *un système parfaitement enchaîné. Ici »parfait» et »bien enchaîné» ne sont pas seulement des mots, mais des attributs du continu tout à fait généraux, caractérisés d'une manière abstraite, de la façon la plus précise, par les définitions précédentes.*

La définition que donne Bolzano du continu (Paradoxes, § 38) n'est certainement pas exacte; elle n'exprime qu'une seule propriété du continu, qui se trouve réalisée dans les ensembles obtenues en concevant comme éloignées de G_n un système de points »*isolé*» quelconque (cf. Ann. math. t. XXI, p. 51); elle se trouve de même réalisée dans des systèmes composés de plusieurs continus séparés; évidemment dans ces cas il n'y a pas de continu, comme le ferait croire la définition de Bolzano: nous trouvons donc ici une faute contre le principe: on dit qu'une chose fait partie de l'essence d'une autre, quand l'une ne peut exister sans l'autre et que la présence de l'une entraîne celle de l'autre, ou que l'une ne peut ni exister ni se concevoir sans l'autre, et vice versa.

Notes.

L'ensemble de toutes les fonctions continues, et même de toutes les fonctions, susceptibles d'être intégrées, d'une ou de plusieurs variables, ne pourrait avoir, comme il me semble, que la puissance de la deuxième classe de nombres (II); cependant si on laisse de côté toutes les restrictions et qu'on considère l'ensemble de toutes les fonctions continues et discontinues d'une ou de plusieurs variables, ce système aura la puissance de la troisième classe de nombres (III).

On peut démontrer pour les systèmes parfaits ce théorème: ils n'ont jamais la puissance de (I).

Comme exemple d'un système de points parfait, qui n'est pas condensé dans toute l'étendu d'un intervalle si petit qu'il soit, j'indique l'ensemble de tous les nombres réels contenus dans la formule:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \ldots\ldots$$

où les coefficients c_ν peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2 et où la série peut être composée d'un nombre fini ou infini de membres.

Il faut remarquer que la définition d'un continu donnée en haut est indépendante de toute considération sur ce qu'on appelle la dimension d'une figure continue; la définition en effet embrasse aussi les continus composés de parties bien enchaînées de différente dimension, comme des lignes, des surfaces, des solides, etc. Je sais bien que le mot »continu» n'a pas pris jusqu'à présent, dans les mathématiques, un sens bien arrêté; la définition que j'en donne sera donc trop étroite pour les uns, trop large pour les autres; j'espère avoir réussi à trouver le juste milieu.

D'après ma manière de concevoir les choses on ne peut entendre par continu qu'un ensemble parfait et bien enchaîné. D'après cela une étendue droite par exemple, à laquelle manque un des points-extrêmes, ou tous les deux, une surface circulaire sans limite ne sont pas des continus parfaits; j'appelle ces systèmes de points des semi-continus.

En général j'entends par semi-continu un système de points imparfait, bien enchaîné, appartenant à la seconde classe et constitué de telle sorte que deux quelconques de ses points peuvent être réunis par un continu

parfait, qui est un élément constitutif du système de points. Tel est, p. ex., l'espace que j'ai désigné par A (Ann. math., t. XX, p. 119) et qui a été obtenu en éloignant de G_n un système de points quelconque de la première puissance.

Le dérivé d'un système de points bien enchaîné est toujours un continu, que le système de points bien enchaîné ait la première ou la deuxième puissance.

Si un système de points bien enchaîné est de la première puissance, je ne puis l'appeler ni un continu ni un semi-continu.

SUR DIVERS THÉORÈMES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES
DE POINTS SITUES
DANS UN ESPACE CONTINU A N DIMENSIONS.
PREMIÈRE COMMUNICATION.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

G. CANTOR.

. . . . M'étant proposé de vous communiquer les démonstrations de plusieurs théorèmes, que j'ai trouvés dans la théorie des ensembles, je vous prie de me permettre de commencer par les trois suivants, A, B et C dont j'ai fait mention dans le mémoire: »*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883».

Comme j'aurai à citer ce travail en divers endroits, je prendrai la liberté de le désigner par les lettres »*Gr*».

Théorème A. »Un ensemble de points P (situé dans un espace continu G_n à n dimensions) ayant la *première puissance* ne peut jamais être un ensemble *parfait*.»

Théorème B. »Le nombre α appartenant à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres, soit P un ensemble de points tel, que son *ensemble dérivé* $P^{(\alpha)}$ d'ordre α s'évanouit, alors le *premier ensemble dérivé* $P^{(1)}$ de P et *l'ensemble* P lui même sont de la *première* puissance, sauf les cas où les ensembles P ou $P^{(1)}$ sont finis.»

Théorème C. »P étant un ensemble de points tel, que son premier ensemble *dérivé* $P^{(1)}$ est de la première puissance, il existe des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels, qu'on a identiquement:

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

et de tous ces nombres α il y a un qui en est le plus petit.»

Démonstration du théorème A.

D'après »*Gr.* § 10« j'appelle *ensemble parfait de points* un ensemble S tel, que son premier dérivé $S^{(1)}$ coïncide avec S lui même, en sorte que tout point s appartenant à S est un point-limite de S et qu'aussi tout point-limite s' de S est un point appartenant à S.

Soient maintenant

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots$$

les points qui constituent l'ensemble P; nous pouvons les imaginer donnés en cette forme de série (p_ν), parce que P a d'après l'hypothèse, admise dans notre théorème, la *première puissance.*

Nous admettons que chaque point p_ν de P est un *point-limite* de P et nous voulons en conclure l'existence de *points-limites* de P qui n'appartiennent pas comme *points* à P; il en suivra que P ne peut pas être un ensemble parfait, car s'il en était ainsi, non seulement chaque *point* de P devrait être un *point-limite* de P, mais aussi chaque *point-limite* de P serait nécessairement un *point appartenant* à P.

Que l'on prenne p_1 pour centre d'un ensemble continu à $(n-1)$ dimensions, lieu des points de G_n qui ont la distance $\rho_1 = 1$ de p_1; nous nommerons un tel ensemble une sphère de rayon ρ_1 et nous la désignerons ici par K_1.

De tous les points de la suite (p_ν) qui suivent p_1 soit p_{i_2} le premier qui tombe dans *l'intérieur* de la sphère K_1 (et il y en a dans l'intérieur de K_1 un nombre infini, puisque le centre p_1 est, comme nous avons admis, un *point-limite* de P); nommons σ_1 la distance des points p_1 et p_{i_2} et prenons p_{i_2} comme centre d'une *seconde* sphère K_2, dont le rayon ρ_2 est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités:

$$\frac{1}{2}\sigma_1, \qquad \frac{1}{2}(\rho_1 - \sigma_1).$$

La sphère K_2 est alors située toute entière à l'intérieur de K_1 et les points:

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}$$

de la série (p_ν) sont situés tous en dehors de la sphère K_2; le rayon ρ_2 de la dernière est, comme on voit, plus petit que $\frac{1}{2}$.

De même soit p_{i_3} le premier point de la suite (p_ν) de tous ceux, qui suivent p_{i_2} et qui tombent dans l'intérieur de la sphère K_2; il y en a un nombre infini, puisque p_{i_2} est supposé être point-limite de P; nous désignons la distance des points p_{i_2} et p_{i_3} par σ_2 et prenons p_{i_3} pour centre d'une troisième sphère K_3, dont le rayon ρ_3 est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités:

$$\frac{1}{2}\sigma_2, \qquad \frac{1}{2}(\rho_2 - \sigma_2);$$

la sphère K_3 est alors située tout entière à l'intérieur de K_2 et les points:

$$p_1, \; p_2, \ldots p_{i_3-1}$$

de la série (p_ν) sont situés tous en dehors de la sphère K_3; le rayon ρ_3 est évidemment plus petit que $\frac{1}{4}$.

On voit donc ici une *loi* d'après laquelle on peut former une suite infinie de sphères:

$$K_1, \; K_2, \; K_3, \ldots, K_\nu, \ldots$$

liée à une série déterminée de nombres entiers i_ν croissants avec leurs indices, de sorte que l'on a:

$$1 < i_2 < i_3 < \ldots$$

Chaque sphère K_ν est située toute entière à l'intérieur de la précédente $K_{\nu-1}$

Le centre p_{i_ν} de la sphère K_ν est défini par la condition qu'il est le premier point de la série (p_ν) de tous ceux qui suivent $p_{i_{\nu-1}}$ et qui sont situés à l'intérieur de la sphère $K_{\nu-1}$; le rayon ρ_ν de K_ν est défini par la condition d'être le plus petit des deux nombres:

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\rho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}),$$

en désignant par $\sigma_{\nu-1}$ la distance des points $p_{i_{\nu-1}}$ et p_{i_ν}.

Les points $p_1, \; p_2, \ldots p_{i_\nu-1}$ sont situés tous en dehors de la sphère K_ν; mais il y a un nombre infini de points de la série (p_ν), qui sont

situés à l'intérieur de K_ν, puisque le centre p_{i_ν} est, comme nous l'avons admis, un point-limite de P. Comme on a évidemment

$$\rho_\nu < \frac{1}{2^{\nu-1}},$$

les rayons des sphères K_ν deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$, et puisque les sphères K_ν sont emboîtées de telle sorte que K_ν est située à l'intérieur de $K_{\nu-1}$, celle-ci à l'intérieur de $K_{\nu-2}$ etc., on en conclut d'après un principe connu l'existence d'un point t, dont s'approchent indéfiniment les centres p_{i_ν} en sorte que l'on a

$$\lim_{\nu=\infty} p_{i_\nu} = t;$$

le point t est donc *point-limite* de P. Mais de plus on s'assure, que t n'est pas un *point* appartenant à P; car s'il l'était, on aurait $t = p_n$ pour une certaine valeur de l'indice n, équation *impossible*, puisque t est situé à l'intérieur de la sphère K_ν, quelque grand que soit ν, quand au contraire on peut prendre ν assez grand, savoir $\nu > n$, de sorte que p_n tombe en dehors de la sphère K_ν.

Donc nous avons démontré, que P ne peut pas être un *ensemble parfait*.

Démonstration du théorème B.

α étant un nombre donné quelconque de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres, on a, quel que soit l'ensemble P, l'identité suivante:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}) + P^{(\alpha)} \tag{1}$$

dans laquelle α' parcourt tous les nombres entiers positifs qui sont *inférieurs* à α. La vérité de cette identité (1) découle facilement de la notion générale de *l'ensemble dérivé* $P^{(\alpha)}$ *de l'ordre* α.

Lorsque α est un nombre tel, qu'il existe un autre α_{-1} qui précède α immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le *premier ensemble dérivé* de $P^{(\alpha_{-1})}$; mais lorsque α est un nombre tel (comme par exemple ω ou ω^ω ou $\omega^{\omega^\omega} + \omega^2$), qu'il n'a point de voisin qui le précède immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le plus grand commun diviseur de tous les ensembles dérivés $P^{(\alpha')}$, dont les ordres α' sont *inférieurs* à α.

D'après l'hypothèse admise dans notre théorème, $P^{(\alpha)}$ s'évanouit, on a donc ici:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}).$$

Le nombre des valeurs de α' est ou fini ou infini selon que α appartient à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres; mais dans le dernier cas l'ensemble des valeurs de α' est de la *première* puissance (Cf. la définition de la seconde classe de nombres dans *Gr.* § 11).

Chaque terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble de points appartenant à la catégorie de ceux que j'appelle *ensembles isolés* (voir Annales math. T. 21 pag. 51). Comme je l'ai démontré au même endroit, un ensemble *infini* et *isolé* est toujours de la *première puissance.* Donc le terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble ou fini, ou de la *première puissance.* Par là on conclut facilement que $P^{(1)}$ est aussi de la *première puissance,* donc aussi P est de la première puissance, comme on le trouve démontré à l'endroit cité tout à l'heure.

Démonstration du théorème C.

En désignant par Ω le premier nombre de la *troisième* classe de nombres, on a, quel que soit l'ensemble P, l'identité suivante:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha} (P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}) + P^{(\Omega)}, \tag{2}$$

où α parcourt tous les nombres entiers positifs de la *première* et de la *seconde* classe de nombres.

L'ensemble P est d'après l'hypothèse admise dans notre théorème tel, que son premier dérivé $P^{(1)}$ ait la *première puissance;* donc aussi les dérivés $P^{(\alpha)}$, qui sont tous des diviseurs de $P^{(1)}$, ont la même puissance, en tant qu'ils sont constitués par un nombre infini de points.

En nous appuyant maintenant sur le théorème A, démontré plus haut, nous concluons que la différence:

$$(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$$

ne peut pas s'annuler tant que $P^{(\alpha)}$ *n'est pas zéro.*

Si donc tous les dérivés $P^{(\alpha)}$ étaient *différents* de zéro, tous les termes $(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$ de notre somme à droite de l'équation (2) le seraient de même et comme l'ensemble de ces *termes* est de la *seconde* puissance (Cf. *Gr.* § 12), il s'ensuivrait à plus forte raison, que l'ensemble de points à droite de notre équation (2) serait d'une puissance *non inférieure* à la *seconde;* ce qui serait contraire à l'hypothèse, d'après laquelle l'ensemble $P^{(1)}$ à gauche de l'équation (2) est supposé de la *première* puissance. Donc les dérivés $P^{(\alpha)}$ ne peuvent pas être tous différents de zéro, il existe donc des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels que l'on a:

$$P^{(\alpha)} \equiv 0.$$

De ces nombres α il y en a un, qui est le plus petit, comme il est facile de le voir.

Dans le mémoire »*Gr.*» pag. 31, j'ai aussi indiqué une proposition se rapportant au cas où $P^{(1)}$ n'est pas de la première puissance, et qui, dans la forme où je l'ai exprimée, n'est pas tout à fait juste dans sa généralité. Comme je l'ai trouvé alors, il existe sans doute, une seule décomposition:

$$P^{(1)} = R + S,$$

où S est un ensemble parfait, mais R un ensemble de la *première* puissance. Si passant de là je dis que R est un ensemble réductible, ce n'est pas correct dans sa portée générale.

Monsieur Bendixson de Stockholm qui s'est occupé avec un succès distingué de l'examen de ma proposition, a trouvé que R est toujours tel que, pour un certain γ de la première ou de la seconde classe de nombres, on a l'équation:

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) = 0.$$

Il résulte des communications que M. Bendixson a eu l'obligeance de me faire, qu'il a retrouvé d'une manière parfaitement indépendante mes développements d'alors concernant ce sujet, et qu'il les a complétés et rectifiés dans le sens indiqué. Sur ma demande, M. Bendixson a voulu bien rédiger ses recherches pour être publiées à la suite de cette communication.

Halle, le 22 Avril 1883.

QUELQUES THEORÈMES

DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES DE POINTS

Extrait d'une lettre adressée à M. Cantor à Halle

PAR

IVAR BENDIXSON

À STOCKHOLM.

.... Dans votre travail récemment publié: »Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre», vous avez énoncé le théorème suivant, qui me paraît devoir être rectifié dans quelques parties. Vous y dites page 31:

»Hat $P^{(1)}$ die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II), so lässt sich $P^{(1)}$ stets und nur auf einzige Weise in zwei Mengen R und S zerlegen, so dass

$P^{(1)} \equiv R + S$, wo R und S eine äusserst verschiedene Beschaffenheit haben:

R ist so beschaffen dass sie durch den wiederholten Ableitungsprocess einer fortwährenden Reduction bis zur Annihilation fähig ist, so dass es immer eine erste ganze Zahl γ der Zahlenclassen (I) oder (II) giebt, für welche $R^{(\gamma)} \equiv 0$; solche Punctmengen R nenne ich reductibel.

S dagegen ist so beschaffen, dass bei dieser Punctmenge der Ableitungsprocess gar keine Aenderung hervorbringt indem $S^{(1)} \equiv S$.

Derartige Mengen S nenne ich perfecte Punctmengen.»

Acta mathematica. 2. Imprimé 25 Août 1883.

J'ai réussi à construire un exemple, contraire à ce théorème. Avant de le formuler, je veux énoncer un théorème facile dont j'aurai besoin quelquefois dans les pages suivantes:

»Si $\mathfrak{D}(P, P') \equiv P$, P' est un ensemble parfait.»

La démonstration de ce théorème n'offre aucune difficulté. Car chaque point de P est aussi un point de P' d'après l'hypothèse. Or P'' contient au moins tous les points de P'.

Mais P'' ne peut contenir d'autres points que P'. Il en résulte donc que

$P' \equiv P''$, c'est à dire, P' est un ensemble parfait.

c. q. f. d.

L'exemple dont j'ai parlé ci-dessus se construit ainsi:

Soit $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ un intervalle, donné sur l'axe réel, j'y mets les points suivants

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}, \ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^2}, \ \ldots, \ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}, \ \ldots \quad (\nu = 1, 2 \ldots)$$

$$\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^2}, \ \ldots, \ \beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}, \ \ldots \quad (\nu = 2, 3 \ldots)$$

Je nomme cet ensemble $Q_{\alpha, \beta}$.

Nous voyons donc que $Q'_{\alpha, \beta} \equiv (\alpha, \beta)$, où (α, β) désigne un ensemble qui ne contient d'autres points que α et β.

Dans chaque intervalle

$$\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}\right) \ldots \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}\right),$$

je place un ensemble

$$Q_{\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}, \ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}}$$

et dans chaque intervalle

$$\left(\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}\right) \ldots \left(\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}\right)$$

je place un ensemble

$$Q_{\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}, \ \beta - \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}}$$

Je nomme le résultat de toutes ces opérations $Q_{S_{\alpha, \beta}}$.

Or

$$Q'_{S_{\alpha,\beta}} \equiv Q_{\alpha,\beta} + (\alpha, \beta)$$

et il faut que

$$Q''_{S_{\alpha,\beta}} \equiv Q'_{\alpha,\beta} \equiv (\alpha, \beta)$$

Avant de continuer je veux donner la définition suivante:

Par ces mots: »inscrire (ou placer) symétriquement l'étendue a dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$», je veux dire: »fixer deux points γ, δ tels que $\delta - \gamma = a$, $\gamma - \alpha = \beta - \delta$».

Prenons l'intervalle $0 \ldots 1$. Plaçons-y symétriquement l'étendue $1/2$ dans laquelle nous ne plaçons plus d'étendues. Dans chacun des intervalles $0 \ldots 1/4$ et $3/4 \ldots 1$, formés aux côtés de l'étendue inscrite, nous plaçons symétriquement une nouvelle étendue égale à $1/2 \cdot 1/4$ (et dans laquelle il ne faut plus placer d'étendues) et ainsi de suite, de sorte que nous plaçons symétriquement dans chaque intervalle nouveau une étendue, dans laquelle nous ne plaçons pas de nouvelles étendues, et qui est égale à la moitié de ce même intervalle.

Je nomme P_e l'ensemble de points formé par les points extrêmes de toutes les étendues, dans lesquelles nous n'avons pas inscrit de nouvelles étendues. On voit sans difficulté, que chaque point de P_e appartient aussi à P'_e. Car chaque point α_1 de P_e est entouré d'un côté par une étendue, où il n'y a pas de nouvelles étendues inscrites, c'est à dire, où il n'y a pas de points de P_e. Soit b la longueur de cette étendue et $\alpha_1 - b$, α_1 ses points extrêmes.

En construisant l'ensemble P_e nous avons placé l'étendue b symétriquement dans l'intervalle $\left(\alpha_1 - \frac{3b}{2}\right) \ldots \left(\alpha_1 + \frac{b}{2}\right)$. Le point $\alpha_1 + \frac{b}{2}$ est donc un point de P_e. Dans l'intervalle $\alpha_1 \ldots \left(\alpha_1 + \frac{b}{2}\right)$ nous avons symétriquement placé l'étendue $\frac{b}{2^2}$. Il en résulte que $\alpha_1 + \frac{b}{2^3}$ est un point de P_e et ainsi de suite, de sorte que $\alpha_1 + \frac{b}{2^{2\nu+1}}$ est un point de P_e pour $\nu = 1, 2 \ldots$

Il faut donc que α_1 soit un point de P'_e.

Or $\mathfrak{D}(P_e, P'_e) \equiv P_e$, et nous savons donc que P'_e est un ensemble parfait.

Plaçons maintenant dans chaque étendue $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2$ de l'exemple précédent (dans laquelle nous n'avons pas inscrit de nouvelles étendues) un ensemble $Q_{S_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$, comme je l'ai défini ci-dessus, nous obtenons comme résultat un ensemble P; le premier ensemble qui en est dérivé est l'exemple cherché.

On voit facilement que P' contient tous les points de P_e. Il faut donc que P'_e soit une partie intégrante de P'' c'est à dire de P'.

Nous pouvons donc mettre

$$P' \equiv P'_e + T$$

où T est formé par tous les points de P' qui tombent en dedans des étendues désignées plus haut.

Mais la partie de P' qui tombe en dedans d'une étendue quelconque $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2$ est, comme on le voit facilement, un ensemble $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, comme je l'ai défini ci-dessus. En observant que $Q'_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, il en résulte que T' est tel, qu'il comprend au moins tous les points de P_e.

Or P'_e est une partie intégrante de T'' c'est à dire de T'. Mais T' ne peut contenir d'autres points que P'_e.

Or

$$T' \equiv P'_e.$$

Nous pouvons donc diviser P' en

$$P' \equiv T + P'_e,$$

où P'_e est parfait et T est tel que

$$T^{(\gamma)} \equiv P'_e.$$

Et il n'y a jamais un γ pour lequel

$$T^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Il s'en suit, que l'ensemble R de votre équation:

$$P' \equiv R + S$$

n'est pas toujours tel, qu'il y ait un γ pour lequel

$$R^{(\gamma)} \equiv 0.$$

En changeant de la manière suivante votre théorème, je crois pouvoir lui donner une exactitude complète:

»Si P est un ensemble de points situés dans un espace continu à n dimensions, et si P' a une puissance plus grande que la première, je puis toujours le diviser d'une seule manière

$$P' \equiv R + S$$

où S est un ensemble parfait et R est de la première puissance et tel qu'il existe toujours un γ, tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0,$$

γ étant un de vos symboles d'infini correspondant à ce que vous avez nommé nombre de la classe (I) ou (II).

Dans les pages suivantes je montrerai la manière dont je prouve votre théorème ainsi changé. Je ne veux pourtant le traiter ici qu'en supposant, que P' soit situé dans un espace continu à une seule dimension, la preuve du théorème général étant tout à fait analogue.

Je veux donc prouver les théorèmes suivants:

Théorème D. [1] *»Si P' a une puissance plus grande que la première, il existe toujours des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$* (où γ parcourt tous vos nombres de la classe (I) et (II)).»

Théorème E. *»Si $P^{(\Omega)}$ est l'ensemble de tous les points du théorème D, $P^{(\Omega)}$ est un ensemble parfait»* (Ω correspond au premier nombre de la classe III).

Théorème F. *»Si $P' - P^{(\Omega)} \equiv R$, R a la première puissance.»*

Théorème G. [2] *»Il existe un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que*

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0.\text{»}$$

Démonstration du théorème D.

Nous avons supposé que P' n'est pas de la première puissance. Il n'existe donc pas un γ, appartenant à vos nombres de la classe (I) ou

---

[1] Les lettres sont choisies, comme l'a souhaité M. Cantor, afin que les théorèmes puissent être plus en correspondance avec ses propres théorèmes A, B, C page 409 de ce même tome.

[2] M. Cantor m'a informé, que les théorèmes D, E, F étaient déjà trouvés par lui. Quant au théorème G, il n'y était pas encore parvenu.

(II) tel que $P^{(\gamma)} \equiv 0$.(¹) Soit donc P' donné dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ de l'axe réel et m un nombre entier positif > 1. Si l'on divise $\alpha \ldots \beta$ en m parties égales, on trouve que dans l'un au moins des intervalles

$$\left(\alpha + n\frac{\beta - \alpha}{m}\right) \ldots \left(\alpha + (n+1)\frac{\beta - \alpha}{m}\right) \qquad (n + 1 \leqq m)$$

doit tomber une partie P_1 de P' telle qu'il n'existe pas un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II) tel que

$$P_1^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Soit $\alpha_1 \ldots \beta_1$ $(\alpha_1 < \beta_1)$ le premier intervalle où cela a lieu. Divisons maintenant l'intervalle $\alpha_1 \ldots \beta_1$ en m parties égales. Dans l'un au moins des intervalles formés

$$\left(\alpha_1 + n_1\frac{\beta_1 - \alpha_1}{m}\right) \ldots \left(\alpha_1 + (n_1+1)\frac{\beta_1 - \alpha_1}{m}\right)$$

doit tomber une partie P_2 de P' telle qu'il n'existe pas un γ pour lequel

$$P_2^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Soit $\alpha_2 \ldots \beta_2$ le premier intervalle de cette espèce.

Ainsi nous formons de suite α_ν, β_ν etc. *in infinitum,* de sorte qu'il tombe toujours dans chaque intervalle $\alpha_\nu \ldots \beta_\nu$ une partie P_ν de P' telle qu'il n'existe pas un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), pour lequel

$$P_\nu^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Mais $\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1}$; $\beta_\nu \geqq \beta_{\nu+1}$.

Les quantités α_ν ont donc une limite supérieure α_∞ et les quantités β_ν ont de même une limite inférieure β_∞.

Il faut donc que

$$\beta_\infty - \alpha_\infty < \beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\beta - \alpha}{m^\nu}.$$

Or $\beta_\infty = \alpha_\infty$. On voit facilement que le point $\beta_\infty = \alpha_\infty$ appartient à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$.

(¹) Voir le théorème B de M. Cantor page 409 de ce même tome.

En effet, entourez le point α_∞ d'un intervalle $(\alpha_\infty - \delta) \ldots (\alpha_\infty + \delta)$, il existe toujours un nombre entier positif n tel que

$$\frac{\beta - a}{m^\nu} < \delta \qquad \text{pour } \nu \geqq n.$$

Il en résulte que

$$\beta_\nu - \alpha_\nu < \delta \qquad \text{pour } \nu \geqq n.$$

Les points α_ν, β_ν tombent donc nécessairement dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots \alpha_\infty + \delta$. Il en résulte qu'il tombe dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots$ $\ldots \alpha_\infty + \delta$ un ensemble P_ν tel qu'il n'y a pas un γ pour lequel

$$P_\nu^{(\gamma)} \equiv 0.$$

C'est à dire, dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots \alpha_\infty + \delta$ tombent des points de $P^{(\gamma)}$ (γ parcourant tous les nombres de la classe (I) ou (II)). Comme cela a lieu pour chaque δ, α_∞ est un point de $P^{(\gamma+1)}$, c'est à dire de $P^{(\gamma)}$ (γ parcourant tous les nombres de la classe (I) ou (II)).

Donc il y a des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$.

c. q. f. d.

En prouvant le théorème D, j'ai aussi donné la preuve d'un théorème, que vous avez énoncé dans les Annales de mathématiques pures et appliquées, Tome XV, savoir: »Quand il n'existe pas un ν, appartenant aux nombres entiers positifs, tel que $P^{(\nu)} \equiv 0$, il existe toujours un ensemble $P^{(\omega)}$ tel, qu'il appartient à la fois à tous les $P^{(\nu)}$.»

Démonstration du théorème E.

Pour prouver le théorème E, je veux commencer par prouver que $P^{(\Omega)}$ ne peut se composer d'un seul point.

Nous avons défini l'ensemble $P^{(\Omega)}$ l'ensemble de tous les points α_∞ qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$. Soit P' donné dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ et a un point de cet intervalle, je dis que $P^{(\Omega)}$ ne peut être égal à a.

Soient $m_1, m_2 \ldots m_\nu \ldots$ des nombres entiers positifs, tels que $m_1 < m_2 < \ldots < m_\nu < \ldots$ Dans l'intervalle $\alpha \ldots \left(a - \frac{a - \alpha}{m_1}\right)$ tombe une partie Q_1 de P' telle que $Q_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point. Car

si $Q_1^{(\Omega)}$ contenait un point a_1, ce point appartiendrait à tous les $Q_1^{(\gamma)}$, c'est à dire à tous les $P^{(\gamma)}$. Par suite le point a_1 serait un point de $P^{(\Omega)}$, ce qui n'a pas lieu.

Or $Q_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point.

Il en résulte que Q_1 a la première puissance ou ne contient qu'un nombre fini de points.

Maintenant on prouve de la même manière que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_1}\right) \dots \left(a - \frac{a-\alpha}{m_2}\right)$$

tombe un ensemble Q_2 qui a la première puissance ou est fini et que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_2}\right) \dots \left(a - \frac{a-\alpha}{m_3}\right)$$

tombe un ensemble Q_3 qui a la première puissance ou est fini, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_\nu}\right) \dots \left(a - \frac{a-\alpha}{m_{\nu+1}}\right) \qquad \text{pour } \nu = 1, 2 \dots n \dots$$

tombe un ensemble Q_ν qui a la première puissance ou est fini.

L'ensemble de tous ces intervalles forme un ensemble de la première puissance et dans chaque intervalle tombe un ensemble de points qui a aussi la première puissance (ou est fini).

Or la somme de tous ces ensembles de points a la première puissance (ou est finie).

La partie de P' qui tombe dans l'intervalle $\alpha \dots a$ est donc de la première puissance (ou est finie).

On prouve de la même manière que la partie de P' qui tombe dans l'intervalle $a \dots \beta$ est de la première puissance (ou est finie).

Donc P' a la première puissance, (ou est fini), ce qui n'a pas lieu.

Or $P^{(\Omega)}$ ne peut se composer d'un seul point.

Maintenant nous pouvons sans difficulté prouver que $P^{(\Omega)}$ est un ensemble parfait.

Je veux d'abord faire remarquer que tous les points de $P^{(\Omega)}$ sont des points de $(P^{(\Omega)})'$. Car s'ils ne l'étaient pas, il y aurait un point α de $P^{(\Omega)}$

tel, qu'on pourrait l'entourer d'un intervalle $(\alpha - \delta) \ldots (\alpha + \delta)$ dans lequel aucun autre point de $P^{(\Omega)}$ ne tomberait. Soit Q la partie de P' située dans l'intervalle $(\alpha - \delta) \ldots (\alpha + \delta)$, il en résulterait que

$$Q^{(\Omega)} \equiv \alpha$$

ce qui est impossible.

Donc on ne peut entourer α d'un tel intervalle.

Or

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)}, (P^{(\Omega)})') \equiv P^{(\Omega)}.$$

Il s'en suit que $(P^{(\Omega)})'$ est un ensemble parfait.

Mais chaque point de $(P^{(\Omega)})'$ est aussi un point de $P^{(\Omega)}$. Car si α_1 est un point de $(P^{(\Omega)})'$, il se trouve dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ des points de $P^{(\Omega)}$. C'est à dire, dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ il tombe une partie Q_1 de P' telle qu'il n'y a pas un γ pour lequel $Q_1^{(\gamma)} \equiv 0$.

Or dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ tombent des points de $Q_1^{(\gamma)}$ c'est à dire de $P^{(\gamma)}$.

Il s'en suit que α_1 est un point de chaque $P^{(\gamma+1)}$ c'est à dire de chaque $P^{(\gamma)}$.

Or α_1 est un point de $P^{(\Omega)}$.

Il faut donc que

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)}, (P^{(\Omega)})') \equiv (P^{(\Omega)})'.$$

Mais de l'autre côté nous avons

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)}, (P^{(\Omega)})') \equiv P^{(\Omega)}.$$

Donc

$$P^{(\Omega)} \equiv (P^{(\Omega)})'.$$

c. q. f. d.

Démonstration du théorème F.

Posons $P' \equiv R + P^{(\Omega)}$, nous voulons prouver que R a la première puissance.

Chaque point α_1 de R est tel qu'on peut l'entourer d'un intervalle $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$, où il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$. Car si on ne le

pouvait pas, α_1 serait un point de $(P^{(\Omega)})'$ c'est à dire de $P^{(\Omega)}$, ce qui n'a pas lieu.

Cet intervalle où il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$, s'étend évidemment sur chaque côté de α jusqu'au point le plus rapproché de $P^{(\Omega)}$. A chaque point de R correspond donc un intervalle dont les points extrêmes sont des points de $P^{(\Omega)}$ et dans lequel il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$. Mais le même intervalle correspond ordinairement à plusieurs points de R.

Si nous regardons tous ces intervalles différents qui n'ont pas de points communs, je sais qu'ils forment un ensemble de la première puissance (ou fini). (¹) Mais dans chacun de ces intervalles est située une partie de R, qui a la première puissance (ou est finie). Car soit R_1 la partie de R qui tombe dans l'un quelconque de ces intervalles, nous savons que $R_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point, chaque point de $R_1^{(\Omega)}$ étant à la fois un point de $P^{(\Omega)}$.

Or R_1 a la première puissance (ou est fini)

Comme dans chacun des intervalles nommés tombe un ensemble de points qui a la première puissance (ou est fini) et que ces intervalles forment aussi un ensemble de la première puissance (ou fini), il en résulte que la somme de tous ces ensembles de points a la première puissance.

Mais la somme de tous les ensembles de points situés dans les intervalles nommés, c'est précisément mon ensemble R.

Donc R a la première puissance.

c. q. f. d.

Démonstration du théorème G.

Il ne nous reste maintenant qu'à démontrer que pour un certain γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), on a

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

Nous avons

$$P' \equiv R + P^{(\Omega)}.$$

(¹) Voir le théorème de M. Cantor page 366 de ce même tome.

Chaque point de $P^{(\gamma)}$ appartient à P', c'est à dire à R ou à $P^{(\Omega)}$. Mais $P^{(\Omega)}$ est une partie intégrante de $P^{(\gamma)}$. Il faut donc que $P^{(\gamma)} - P^{(\Omega)}$ ne contienne que des points de R. Or

$$P^{(\gamma)} - P^{(\Omega)} \equiv \mathfrak{D}(R, P^{(\gamma)}).$$

Il s'en suit que

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R, P^{(\gamma)});$$

De même

$$P^{(\gamma+1)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R, P^{(\gamma+1)});$$

Ou il y a maintenant un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que

$$\mathfrak{D}(R, P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R, P^{(\gamma+1)})$$

ou il n'y en a pas.

S'il y a un γ dans ces conditions, nous voyons que pour ce γ

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R, P^{(\gamma)}) \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R, P^{(\gamma+1)}) \equiv P^{(\gamma+1)}.$$

Or $P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)}$.

De plus, nous savons que

$$\mathfrak{D}(R, P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R, P^{(\Omega)}) \equiv 0.$$

Mais $R^{(\gamma)}$ ne contient d'autres points que $P^{(\gamma)}$. Il s'en suit que

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

Si au contraire il n'existe pas un γ tel que

$$\mathfrak{D}(R, P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R, P^{(\gamma+1)}),$$

il faut nécessairement qu'il y ait pour chaque γ des points de R qui disparaissent, quand je passe de $P^{(\gamma)}$ à $P^{(\gamma+1)}$, c'est à dire des points de R tels, qu'ils appartiennent à $P^{(\gamma)}$ mais non à $P^{(\gamma+1)}$.

Je peux donc ranger les points de R de telle manière qu'à chaque γ correspondent les points de R qui appartiennent à $P^{(\gamma)}$ mais non à $P^{(\gamma+1)}$. Or R a au moins la même puissance que les quantités γ, c'est à dire des nombres de la classe (II), ce qui est contraire au théorème F. [1]

---

[1] Voir le théorème de M. Cantor page 388 de ce même tome.

Il existe donc toujours un certain γ tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)})$$

Il en résulte qu'il y a toujours un certain γ tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

c. q. f. d.

J'ai fait la démonstration ici en supposant que P' soit situé dans un espace continu à une seule dimension.

Le théorème G se prouve exactement de la même manière, si P' est situé dans un espace continu à n dimensions. Quant aux autres théorèmes, leur démonstration dans ce cas est entièrement analogue à la précédente et je ne crois pas nécessaire de la donner séparément.

Je puis maintenant énoncer le théorème primitif de la manière suivante:

»*Si P est un ensemble de points, situés dans un espace continu à n dimensions, et si P' a une puissance plus grande que la première, il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), et tel que $P^{(\gamma)}$ est un ensemble parfait.*»

La preuve de ce théorème n'offre pas de difficulté.

Nous avons

$$P' \equiv R + P^{(\Omega)}$$

où $P^{(\Omega)}$ est parfait et R est tel que $\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0$.

Mais $R^{(\gamma)}$ ne contient que des points de P'. Or $R^{(\gamma)}$ ne contient que des points de $P^{(\Omega)}$.

Il s'en suit que

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)}$$

c'est à dire $P^{(\gamma)}$ *est un ensemble parfait.*

c. q. f. d.

On obtient maintenant le théorème général qui suit:

»*Si P est un ensemble quelconque de points, situés dans un espace continu à n dimensions, il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II) tel que*

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)}.»$$

Car ou P'' est de la première puissance (ou fini), ou il ne l'est pas. Si P'' est de la première puissance (ou fini), il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que

$$P^{(\gamma)} \equiv 0 \equiv P^{(\gamma+1)} \text{ (}^1\text{)}$$

Si P' n'est pas de la première puissance (et n'est pas fini), il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que $P^{(\gamma)}$ est parfait, c'est à dire

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)}$$

c. q. f. d.

Avant de finir je veux démontrer un théorème assez remarquable.

Revenons pour cela à notre exemple P_e page 417, nous voyons que P'_e est un ensemble parfait, situé dans un espace continu à une seule dimension, et tel qu'il peut être exprimé comme le premier ensemble dérivé de l'ensemble isolé T, situé lui aussi dans un espace à une seule dimension.

On peut prouver que:

»*Si P est un ensemble parfait, tel qu'il ne forme nulle part un espace continu et situé dans un espace continu à une dimension, l'ensemble P peut toujours être exprimé comme le premier ensemble dérivé d'un ensemble isolé, situé aussi dans un espace à une dimension.*»

On voit de suite que cette qualité n'appartient pas aux ensembles parfaits qui forment quelque part un espace continu.

Soit P un ensemble parfait qui ne forme nulle part un espace continu et situé dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ de l'axe réel.

Par $(\alpha \ldots \beta)$ je désigne l'ensemble de tous les points de l'intervalle $\alpha \ldots \beta$.

Posons

$$(\alpha \ldots \beta) \equiv P + S$$

Si α_1 est un point de S, je peux donc l'entourer d'une étendue $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$ dans laquelle il n'y a pas un seul point de P. Car si on ne le pouvait pas, α_1 serait un point de P', c'est à dire de P, ce qui n'a pas lieu.

([1]) Voir le théorème C de M. CANTOR page 409 de ce même tome.

Cette étendue $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$ dans laquelle il n'y a pas de points de P s'étend à chaque côté de α_1 jusqu'au point le plus rapproché de P.

Si nous regardons toutes les différentes étendues dont les points extrêmes sont des points de P, mais en dedans desquelles ne se trouve aucun point de P, je sais que ces étendues forment un ensemble de la première puissance.(1) Or l'ensemble Q formé par tous les points extrêmes de ces étendues a aussi la première puissance.

Mais comme les points extrêmes de ces étendues sont des points de P, nous savons que Q est une partie intégrante de P.

L'ensemble Q' est un ensemble parfait. Car si l'on entoure un point β_1 de Q d'un intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$, je sais qu'il y a des points de P dans cet intervalle (chaque point de Q étant point de P, c'est à dire de P''). Mais comme P n'est condensé dans aucune partie de l'intervalle $\alpha \ldots \beta$, il y a aussi dans l'intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$ une étendue, dans laquelle il n'y a pas de points de P.

Les points extrêmes de cette étendue étant des points de Q, il en résulte qu'il y a des points de Q dans chaque intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$.

Or β_1 est un point de Q'.

Or chaque point de Q est aussi point de Q' c'est à dire

$$\mathfrak{D}(Q,\ Q') \equiv Q,$$

et alors Q' est un ensemble parfait.

Maintenant je veux prouver que $Q' \equiv P$.

Il est clair que chaque point de Q' est aussi point de P. Car Q étant une partie intégrante de P, il faut que Q' soit une partie intégrante de P', c'est à dire de P.

On prouve que chaque point de P est aussi point limite de Q, absolument comme j'ai prouvé que chaque point de Q était point limite de Q.

Or P est une partie intégrante de Q'.

Il s'en suit que

$$P \equiv Q'.$$

Si l'on inscrit maintenant dans chaque étendue $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2$ (ε_1, ε_2 sont points de Q), en dedans de laquelle il ne tombe pas de points de P, un

(1) Voir le théorème de M. Cantor page 366 de ce même tome.

ensemble isolé $Q_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$, comme je l'ai défini page 416, je sais que l'ensemble Q_S de tous les $Q_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$ est un ensemble de points isolés.

L'ensemble Q_S est tel que

$$Q'_S \equiv P.$$

Car Q'_S contient au moins tous les points de Q et ne peut contenir que des points de Q'. Or Q''_S contient tous les points de Q'. Il en résulte que Q'_S contient tous les points de Q'.

Or

$$Q'_S \equiv Q' \equiv P.$$

Q_S est donc l'ensemble isolé cherché.

c. q. f. d.

Il existe naturellement un nombre infini d'ensembles isolés Q_s tels que

$$Q'_S \equiv P.$$

Je puis enfin énoncer le théorème suivant dont la preuve a été donnée ici:

»Chaque ensemble parfait P qui ne forme nulle part un espace continu et qui est situé dans un espace continu à une seule dimension, peut être exprimé comme le premier ensemble dérivé d'un ensemble de la première puissance Q, dont les points sont les points extrêmes d'étendues en dedans desquelles ne tombe aucun point de P.»

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

2:1

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1883.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

Inhalt. Table des matières.

Seite.
Page.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT | JOURNAL

HERAUSGEGEBEN | RÉDIGÉ

VON | PAR

G. MITTAG-LEFFLER

2:2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1883.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

Inhalt. Table des matières.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

2:3

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1883.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS

A. HERMANN.

8 RUE DE LA SORBONNE

Inhalt. Table des matières.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT JOURNAL

HERAUSGEGEBEN RÉDIGÉ

VON PAR

G. MITTAG-LEFFLER

2:4

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
BERLIN 1883. PARIS
MAYER & MÜLLER. A. HERMANN.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM. 8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

Inhalt. Table des matières.